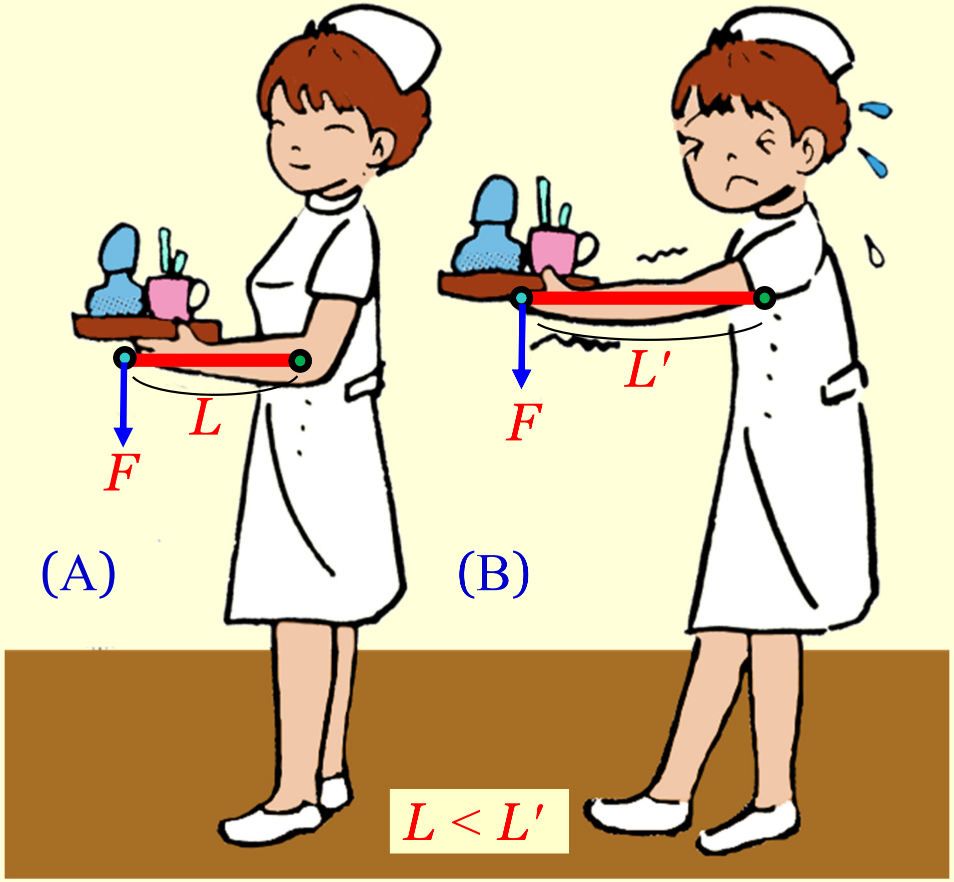
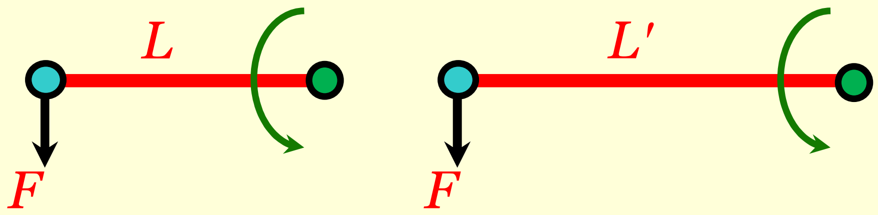
第8章　剛体

力のモーメント(8-4)





シーソーや、図のように手に物を持った腕の動きなど、ある1点（支点）のまわりを回転する軸が存在するとき、回転させようとする能力をモーメント（またはトルク）という。モーメントをM、力の大きさをF、腕の長さをLとすると、

$$M = LF$$

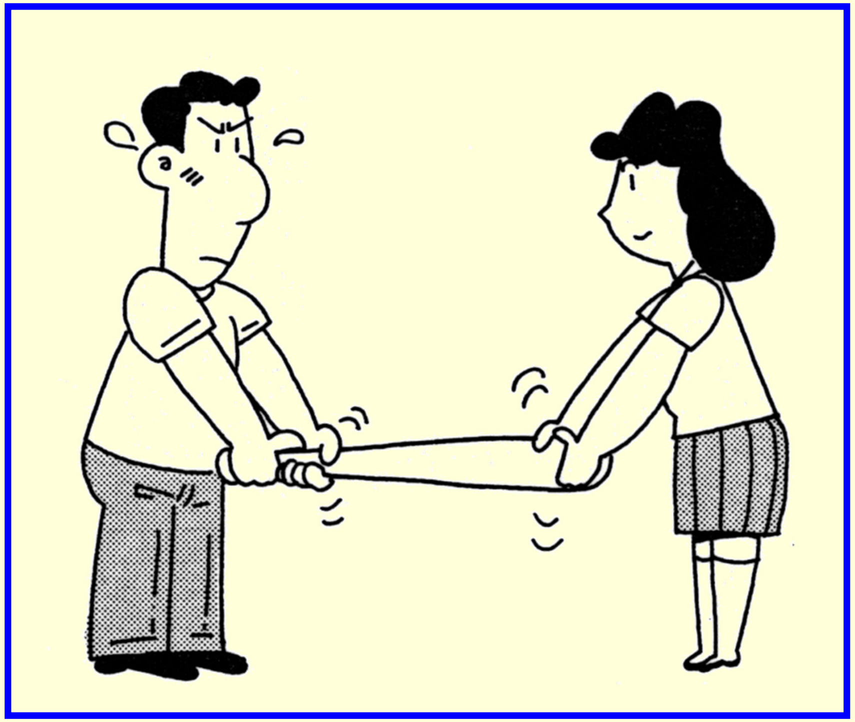
となる。

左図の場合、(A)のモーメントは$M = LF$、(B)のモーメントは$M' = L'F$ となる。$M < M'$ なので、M'のほうが回転しやすいことになる。言い換えると、物を支えるとき、Mに比べて M' の方が力を必要とすることになる。

トルクを表すときには、記号にτ を用いることが多い。

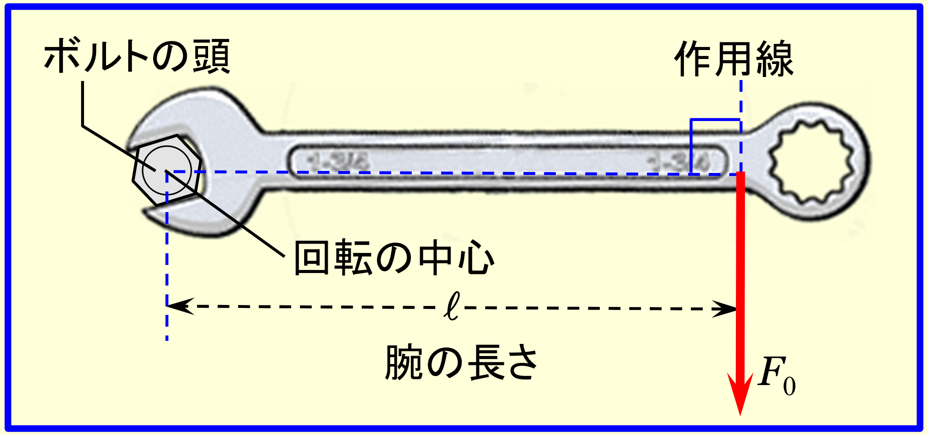
モーメントと力

バット回し



左の細いほうを持った人と、右の太いほう持った人がバットを回そうとするとき、どちらが大きな力を必要とするか？

スパナ



ボルトの頭、もしくはナットの半径を r、スパナの柄の長さを ℓ とし、スパナなどを直接回す力をF_0、作用点での力をFとすると、

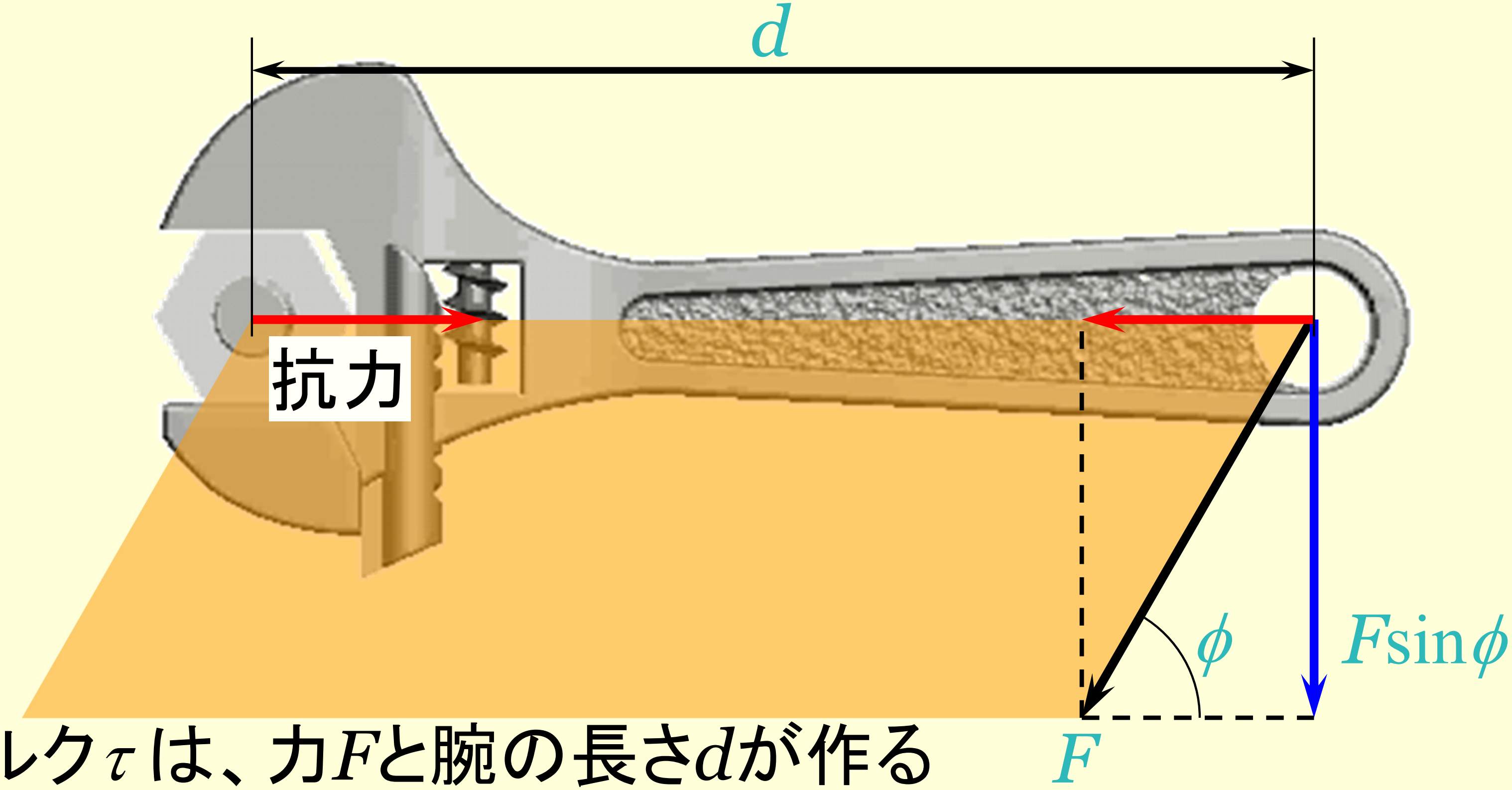
$$F_0\ell = Fr$$

より、

$$F_0 : F = r : \ell$$

となる。柄の太いドライバーにも同様の原理が用いられている。

斜め向きに回そうとすると



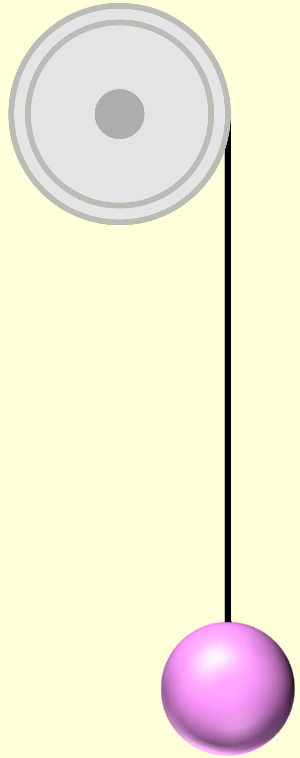
トルクτは、力Fと腕の長さdが作る
平行四辺形の面積に等しい

図のように、モンキーレンチを斜め向きに回そうとした場合、回す方向に働く力は $F\sin\phi$ なので、トルクτは、

$$\boxed{\tau = Fd\sin\phi}$$

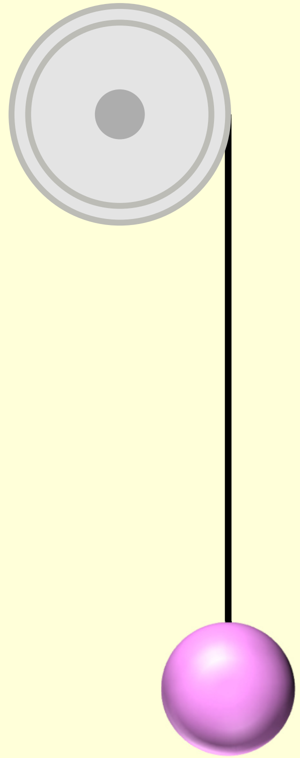
例題(9-1)

最大トルク5[N･m]の小型モーターで滑車を回し、10[kg]のものを持ち上げる。滑車の半径はどのくらいでなければならないか？



例題(9-1)

最大トルク5[N·m]の小型モーターで滑車を回し、10[kg]のものを持ち上げる。滑車の半径はどのくらいでなければならないか？



最大トルク以上のトルクがかかるとモーターは動かなくなる。$\tau = Fr$ より、

$$r < \tau / F = \tau / mg = 5 / (10 \times 10) = 0.05[\mathrm{m}]$$

よって、滑車の半径は5[cm]以下でなければいけない。

テコ

テコには支点・力点・作用点(重点)の3つの点が存在し、その点の位置関係で第1のテコから第3のテコまで、3種類のテコに分けられる。

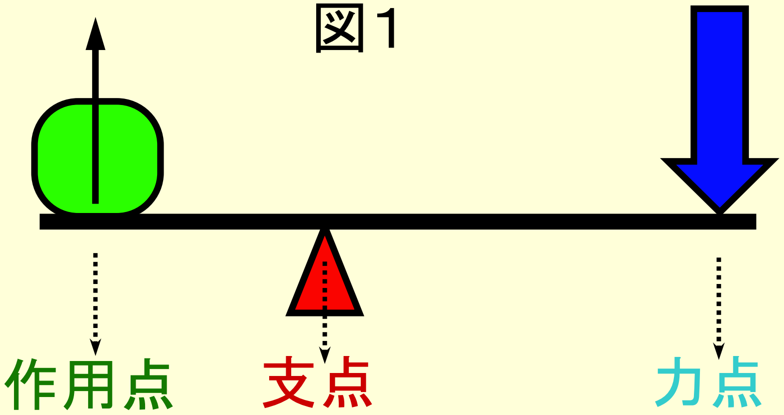
力点	:物を作用するために力を入れる点(場所)
作用点	:作用される物体の置かれている重点(場所)
支点	:力点と作用点を支える力の中心点

第1のテコ

図1に示すように、支点が力点と作用点(重点)の間にあるテコ。

具体例として、洋ばさみ・釘抜き・天秤などがあげられる。

図1



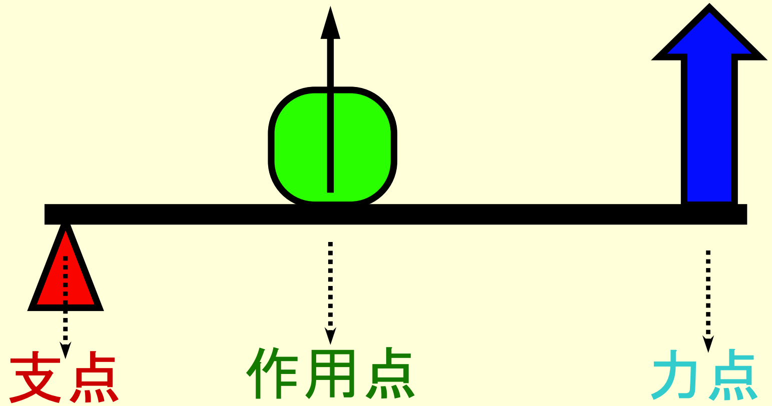
テコ

第2のテコ

　図2に示すように、支点と力点の間に作用点(重点)があるテコ。

具体例として、栓抜き・押し切り(カッター)などがあげられる。

図2

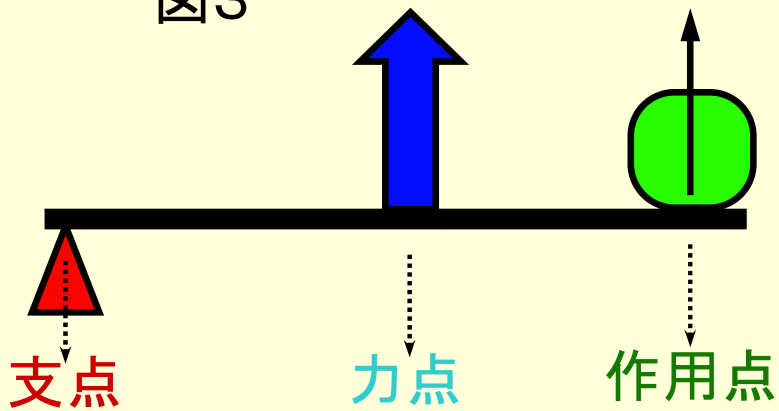


第3のテコ

　図3に示すように、支点と作用点(重点)の間に力点があるテコ。

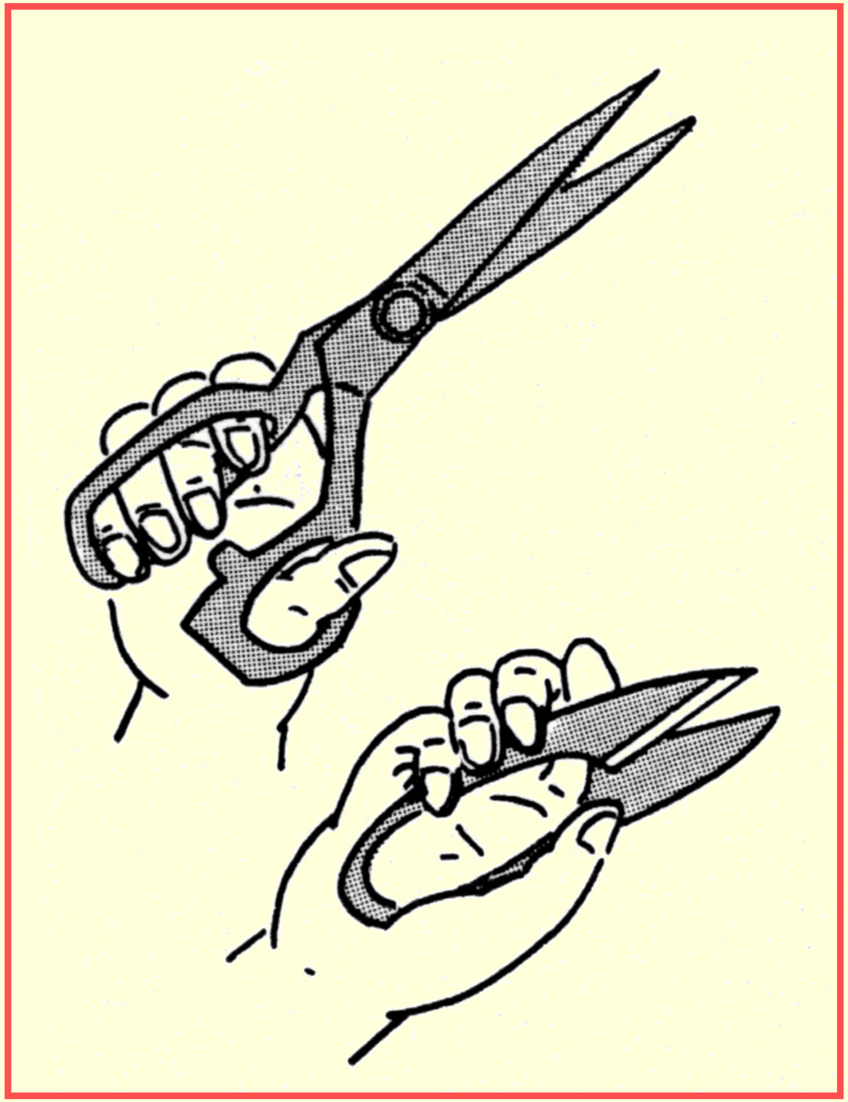
具体例として、ピンセット・毛抜きなどがあげられる。

図3



洋ばさみと和ばさみ

「洋ばさみと和ばさみの違いを物理的に理解しよう」



洋ばさみ

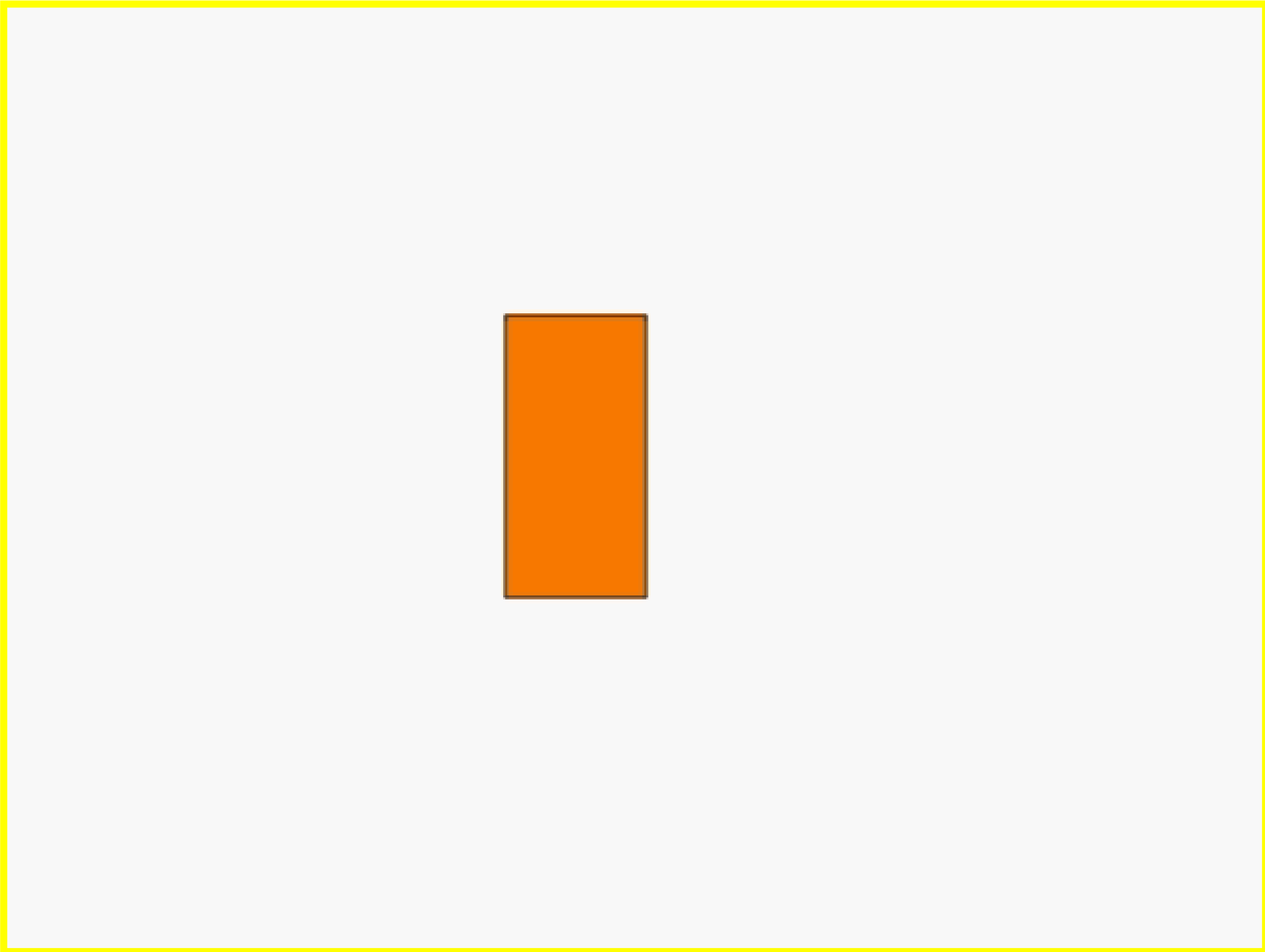
　第１のテコを利用していて、物を切るときは刃を大きく開いて奥まで入れてから切るので、小さな力で切ることができる。

和ばさみ

　支点が柄の部分にあり、力点が真ん中にある第３のテコである。従って大きな力を入れないと切れないので、細かい操作を必要とする場合に適している。

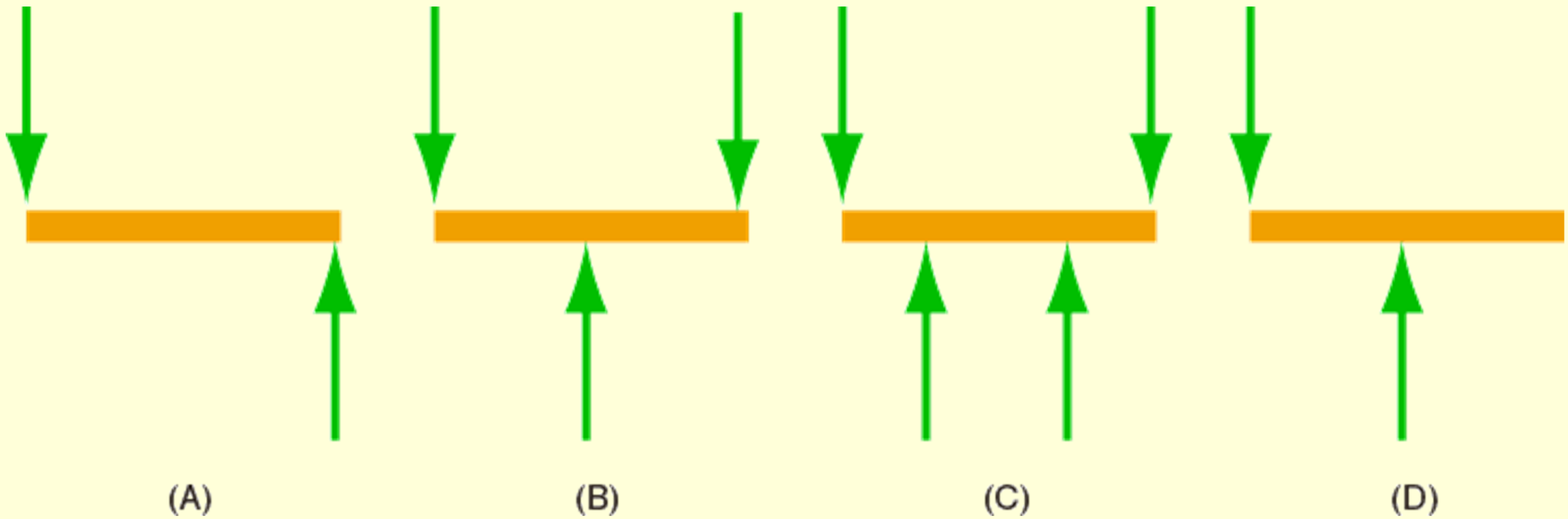
なお、洋ばさみの切り始めとその最中には、静止摩擦係数と動摩擦係数の考え方が適用できる。

平衡状態の条件(8-5)



完全な平衡状態では、力の合計だけでなく、トルクの合計も0になる。

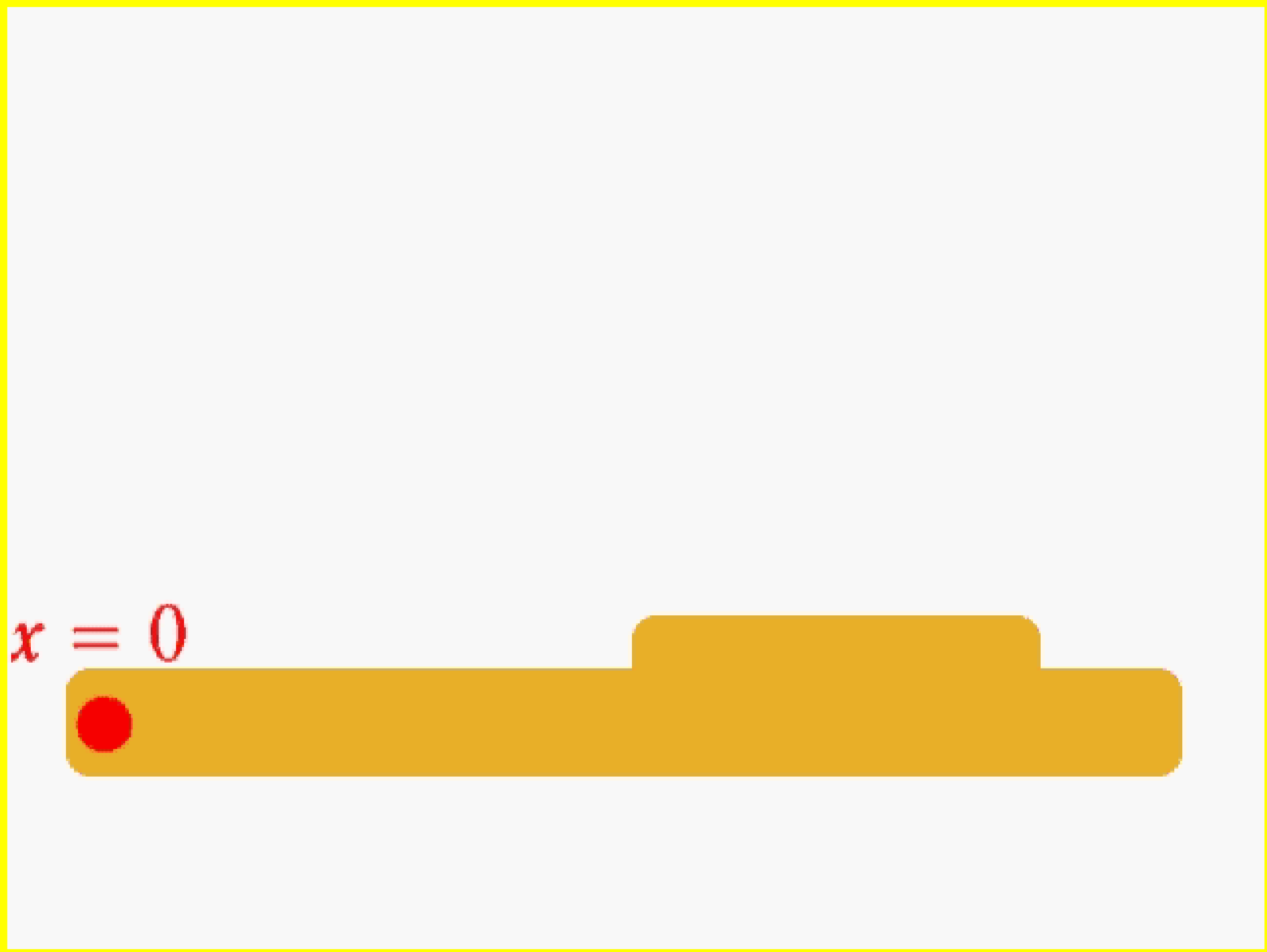
例題



平衡なのはどれか？（矢印の表している力の大きさは全て同じとする。）

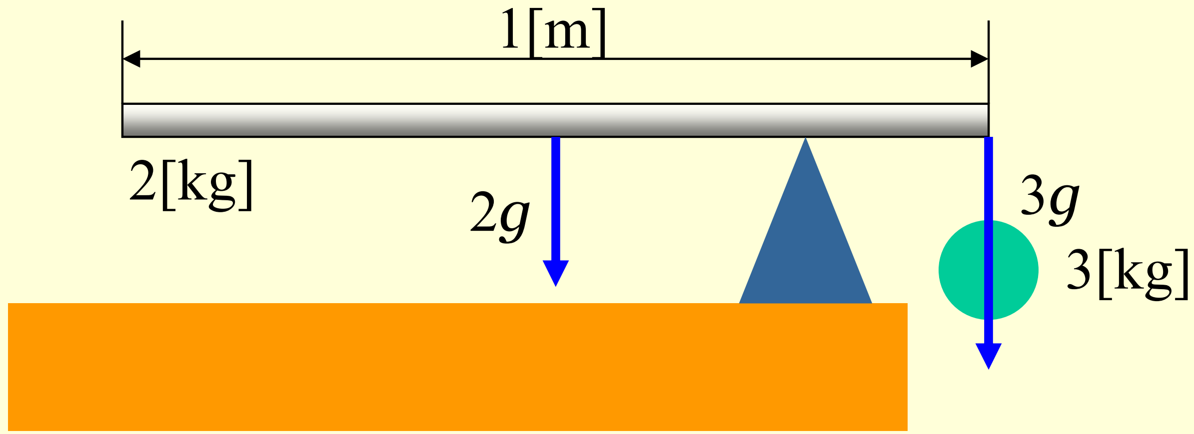
重心とトルク

重力によるトルクは、重心の位置に
全質量がある場合のトルクと等しい



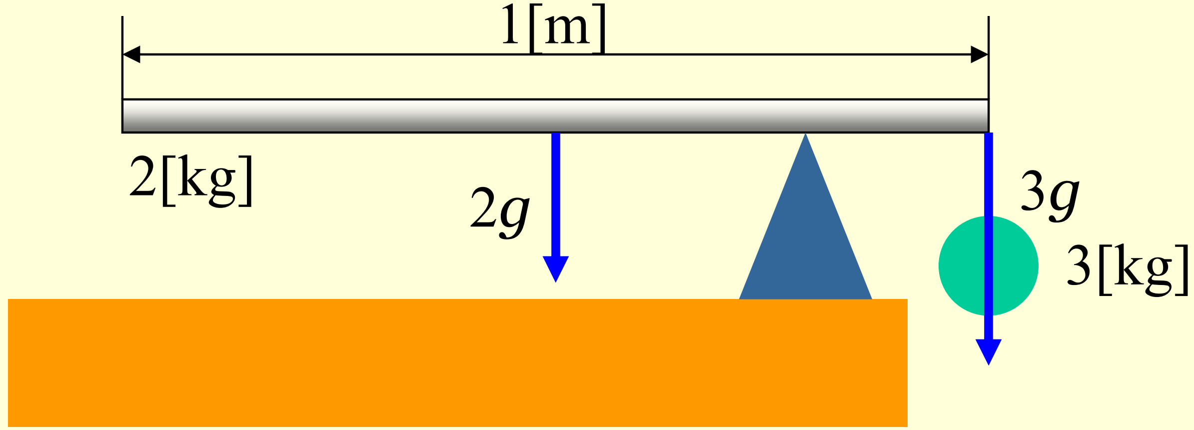
例題

図のように、質量2[kg]で長さ1[m]の一様なパイプがある。端に質量3[kg]のおもりを結びつけて支点で釣り合わせる。支点の位置をどこにおいたらよいか？



例題

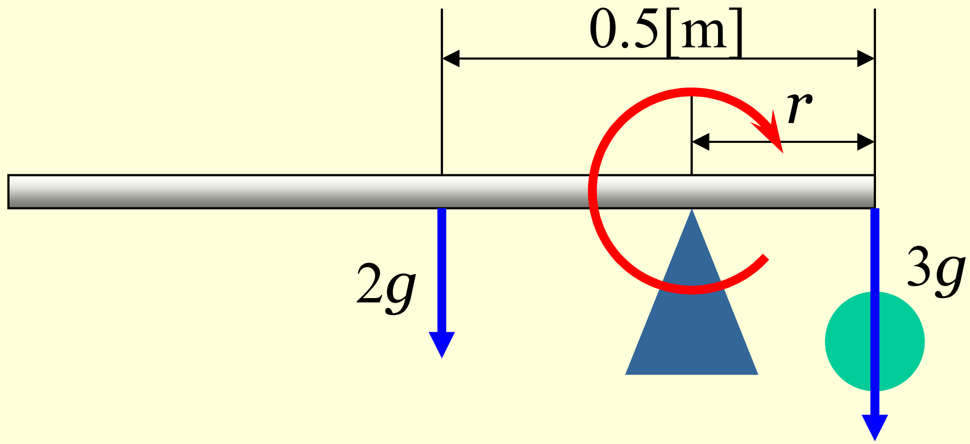
図のように、質量2[kg]で長さ1[m]の一様なパイプがある。端に質量3[kg]のおもりを結びつけて支点で釣り合わせる。支点の位置をどこにおいたらよいか？



パイプは均質なので、端から0.5[m]の重心のところに全重量がかかると考えてよい。端から r の位置を支点とすると、トルクの釣り合いは、

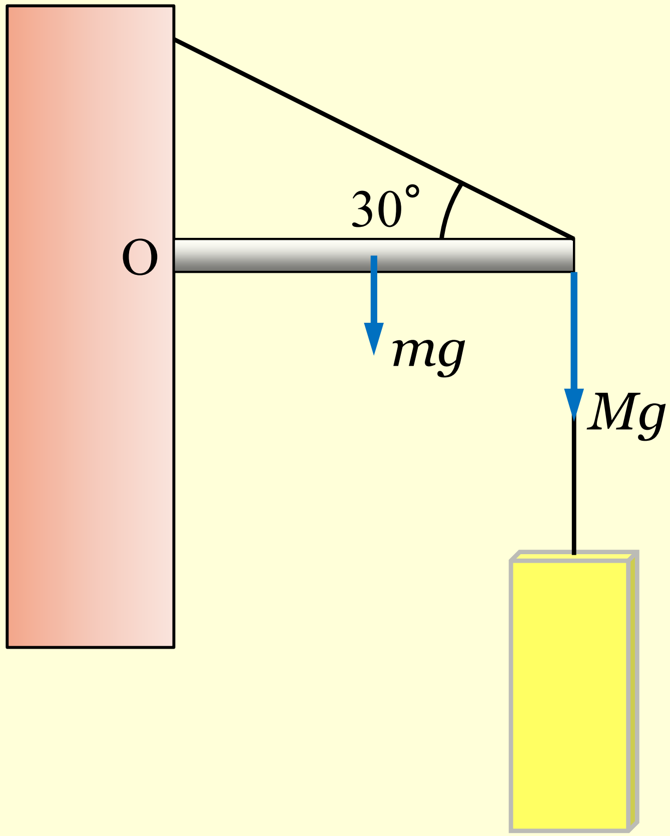
$$3gr - 2g(0.5 - r) = 0$$

となり、これより $r = 0.2$[m] となる。



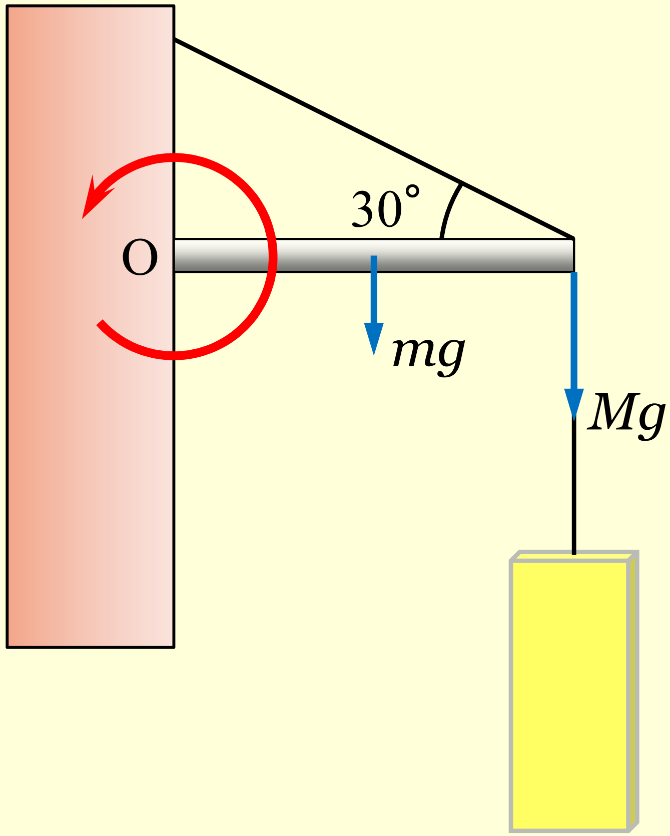
例題

図のように、角度30°で質量10[kg]の看板をつるす。均質な鉄の棒の質量は6[kg]で、長さはLである。支えるロープにかかる張力はいくらか？



例題

図のように、角度30°で質量10[kg]の看板をつるす。均質な鉄の棒の質量は6[kg]で、長さはLである。支えるロープにかかる張力はいくらか？



鉄の棒は均質なので重心に力が働く。O点から鉄の棒に加わる力がわからないので、力の釣り合いから求めずに、トルクの釣り合いから張力を求める。O点まわりのトルクを計算すると、

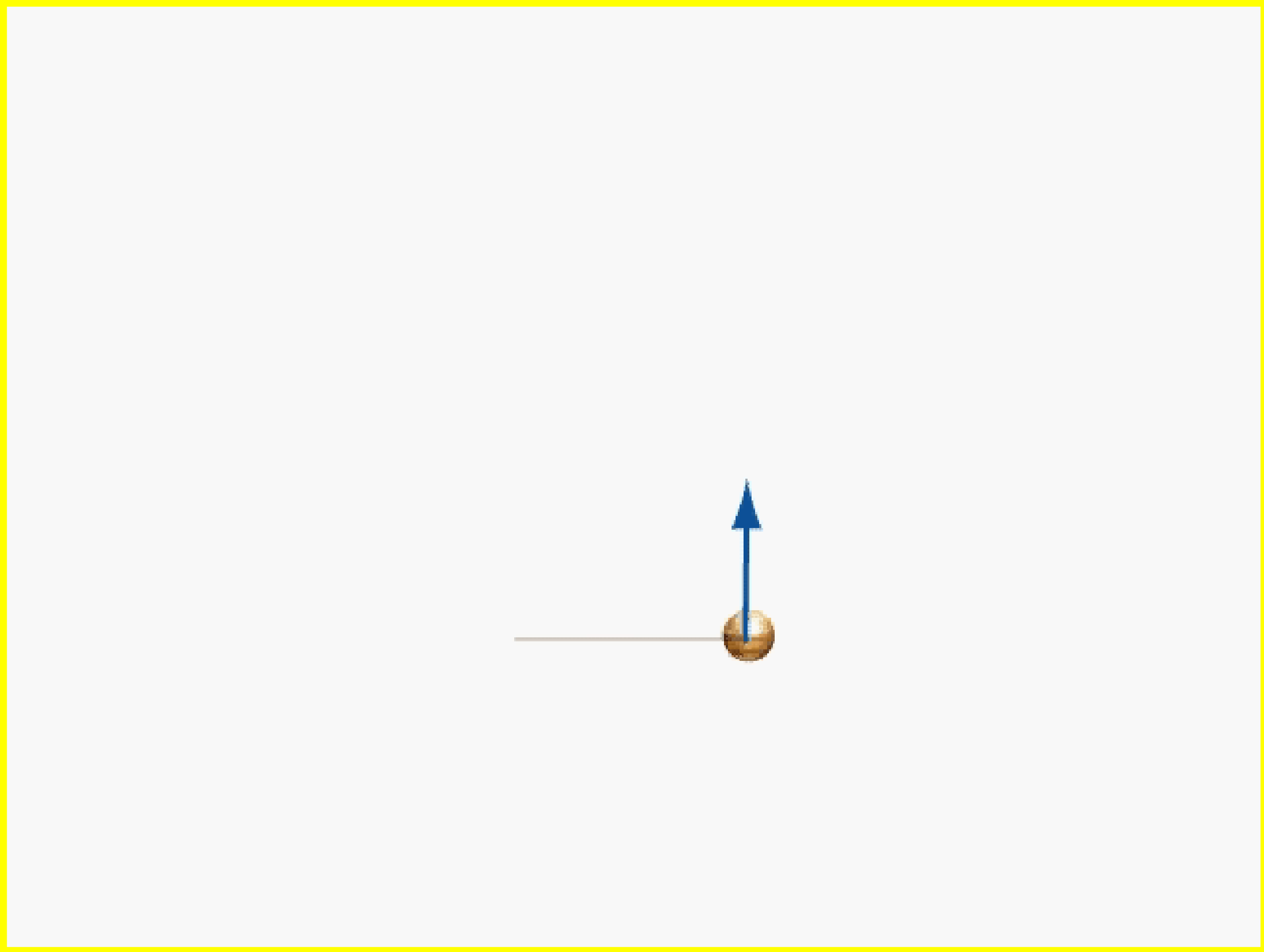
$$(T\sin 30^\circ)L - mg(\frac{1}{2}L) - MgL = 0$$

となる。これより、

$$T = \frac{\frac{1}{2}60[\mathrm{N}] + 100[\mathrm{N}]}{\sin 30^\circ} = 260[\mathrm{N}]$$

となる。

トルクと角加速度(8-8)



$$\tau = Fr$$
$$= mar \Leftarrow a = r\alpha$$
$$= \underline{mr^2}\alpha$$

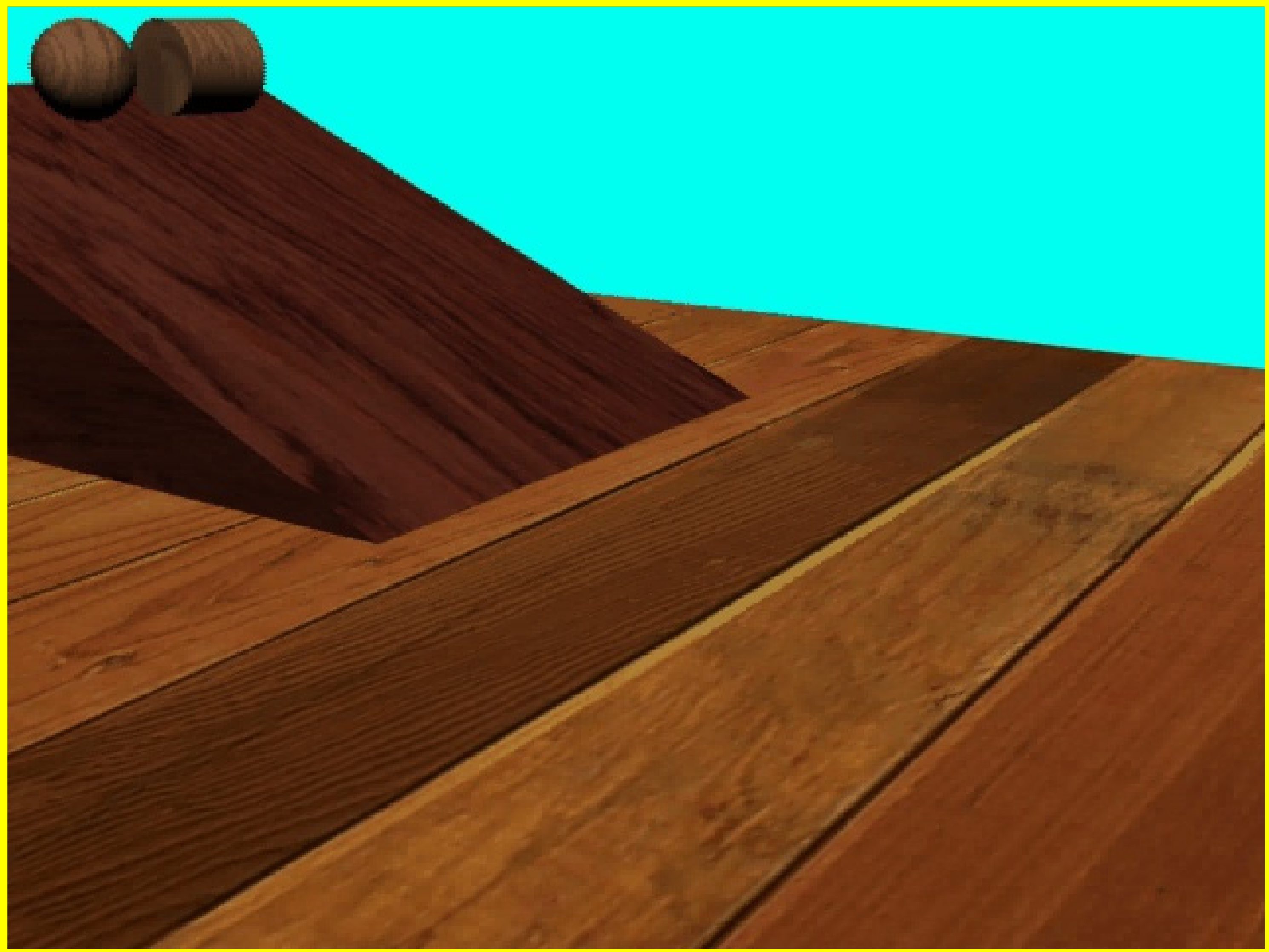
慣性モーメント

物体の回りにくさを示す指標

$$I = mr^2$$

同じトルクなら、慣性モーメントが大きいほど、角加速度が小さくなる。
つまり、重いものや半径の大きいものほど、回りにくい。

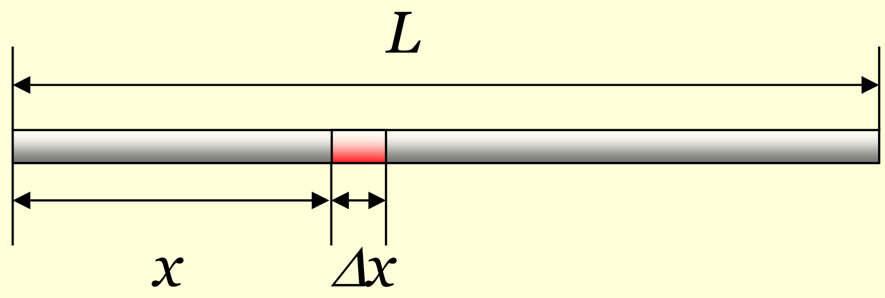
形による違い



円柱の方が中心から遠くに物質が多い → 転がりにくい

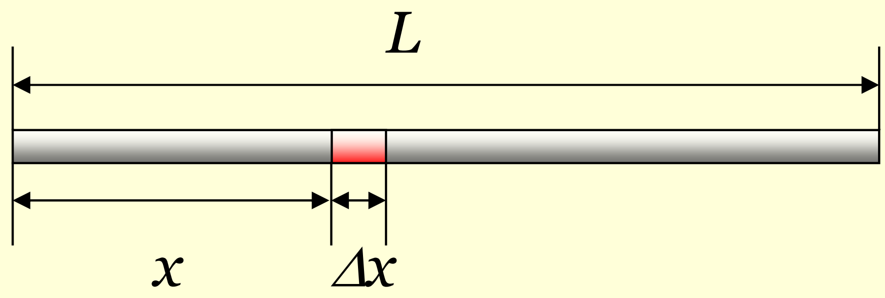
例題

長さLで質量Mの均質な棒がある。棒の端を軸とした時の棒の慣性モーメントを求めなさい。



例題

長さLで質量Mの均質な棒がある。棒の端を軸とした時の棒の慣性モーメントを求めなさい。



単位長さあたりの質量は M / L である。端を原点として位置 x から $x + \Delta x$ の区間の重さは、$\Delta M = (M / L)\ \Delta x$である。この部分の慣性モーメント ΔI は、

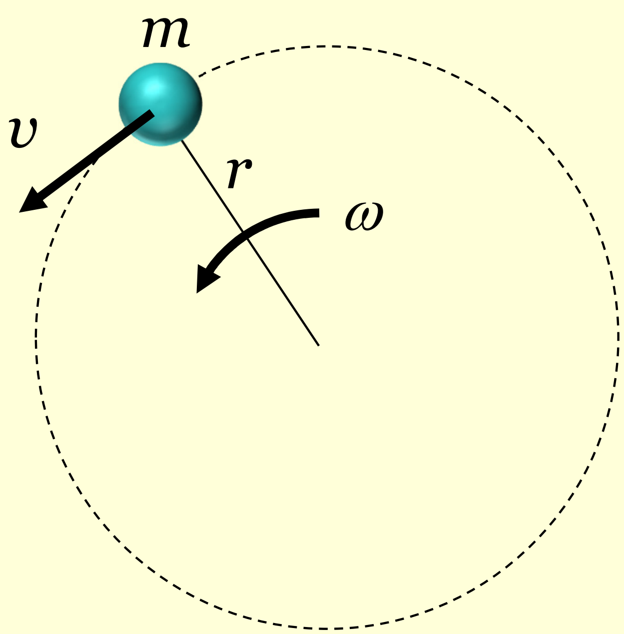
$$\Delta I = \Delta M \times x^2 = \frac{M}{L} \Delta x \times x^2$$

である。よって、すべての部分の慣性モーメント I は、

$$I = \sum \frac{M}{L} x^2 \Delta x = \int_0^L \frac{M}{L} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} M L^2$$

となる。

回転のエネルギー(9-2)



$$v = r\omega$$

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$I = mr^2$ を代入すると、

回転の運動エネルギー

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

慣性モーメントは、直線運動の質量と同じように考えることができる！

角運動量(9-7)

運動方程式 ⟷ 運動量 ⇒ 運動量の保存

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

$$p = mv$$

全体の力が0なら

$$m_i v_i = m_f v_f$$

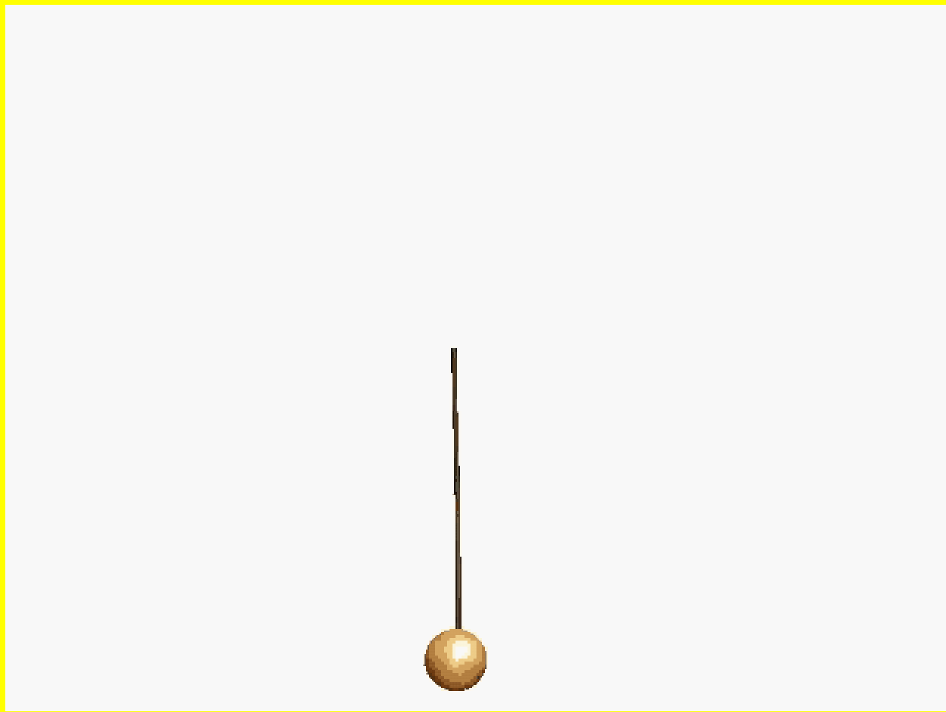
回転の運動方程式 ⟷ 角運動量 ⇒ 角運動量の保存

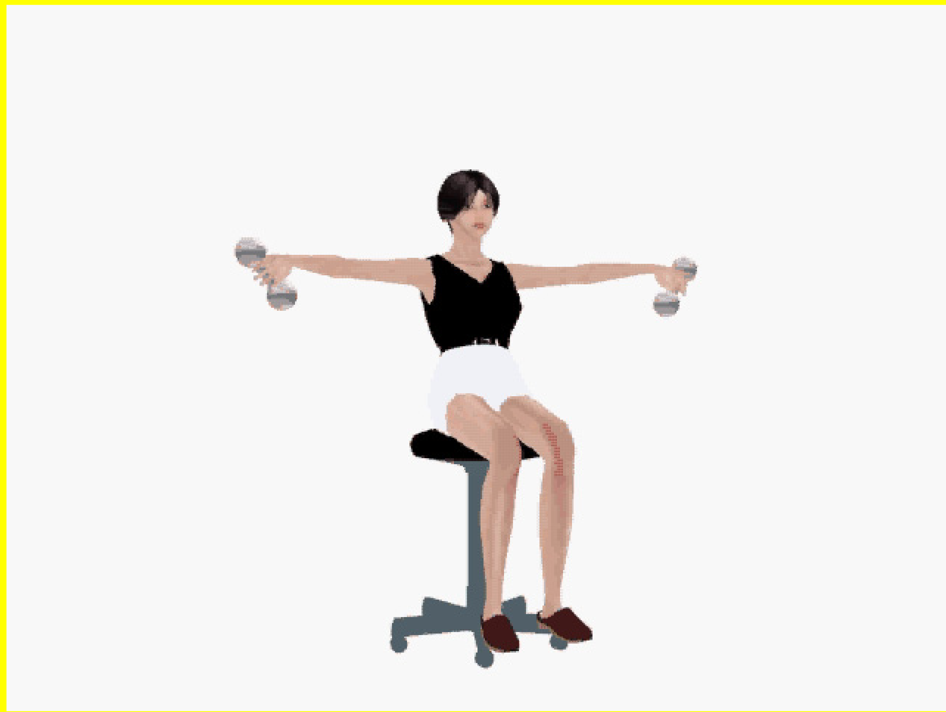
$$\tau = I\alpha = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$L = I\omega$$

全体のトルクが0なら

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$



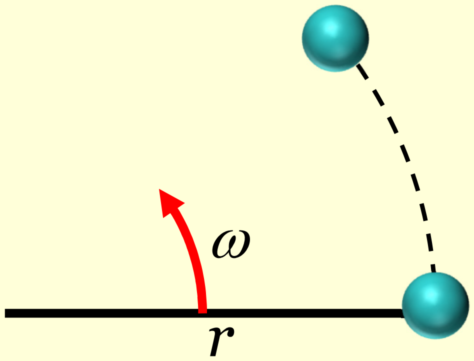


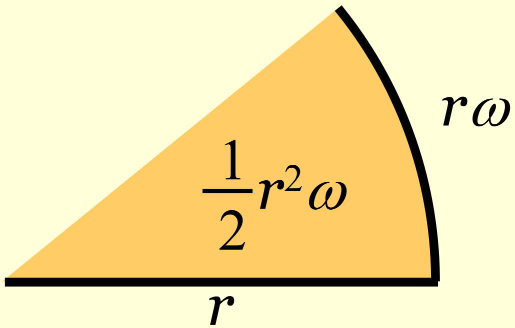
角運動量の保存

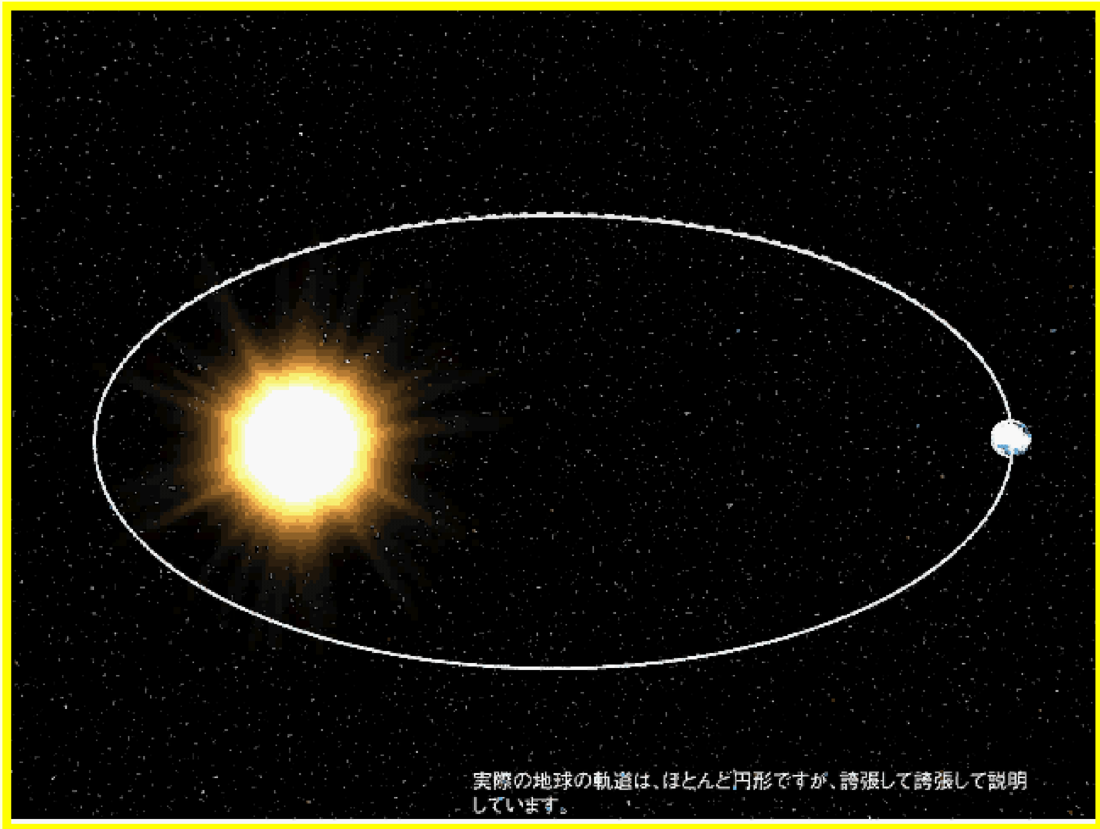
角運動量 $L = I\omega$ に $I = mr^2$ を代入すると、

$$L = mr^2\omega$$

となる。この $r^2\omega$ は単位時間あたりにひもが通過する面積の2倍に等しい。







これを**面積速度一定の法則**という。