



第7章 円運動の動力学と 惑星の運動

円運動の復習

変位 x [m]



$$v = \frac{dx}{dt}$$



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

速度 v [m/s]



$$a = \frac{dv}{dt}$$



$$v = v_0 + at$$

加速度 a [m/s²]

$$\times \frac{1}{r}$$

$$\times r$$

角度 θ [rad]



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

角速度 ω [rad/s]



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

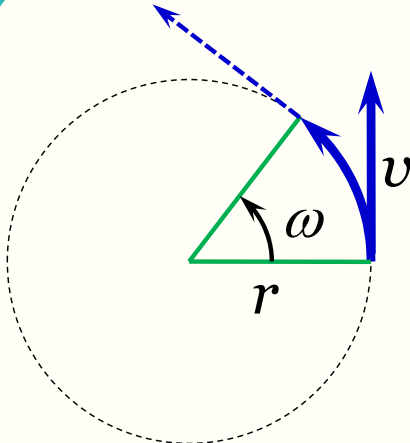


$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

角加速度 α [rad/s²]

$$x = r\theta, v = r\omega, a = r\alpha$$

$$v = r\omega$$

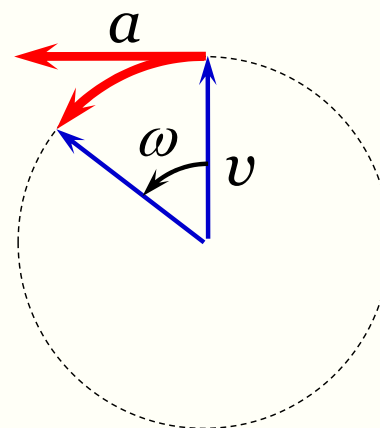


1周するのにかかる時間を T とすると、

$$2\pi r = vT = v \frac{2\pi}{\omega}$$

なので、

$$v = r\omega$$



1周するのにかかる時間を T とすると、

$$2\pi v = aT = a \frac{2\pi}{\omega}$$

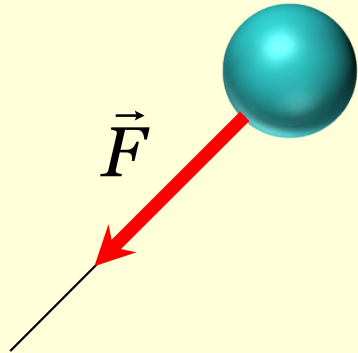
なので、

$$a = v\omega = r\omega^2$$

円運動の力

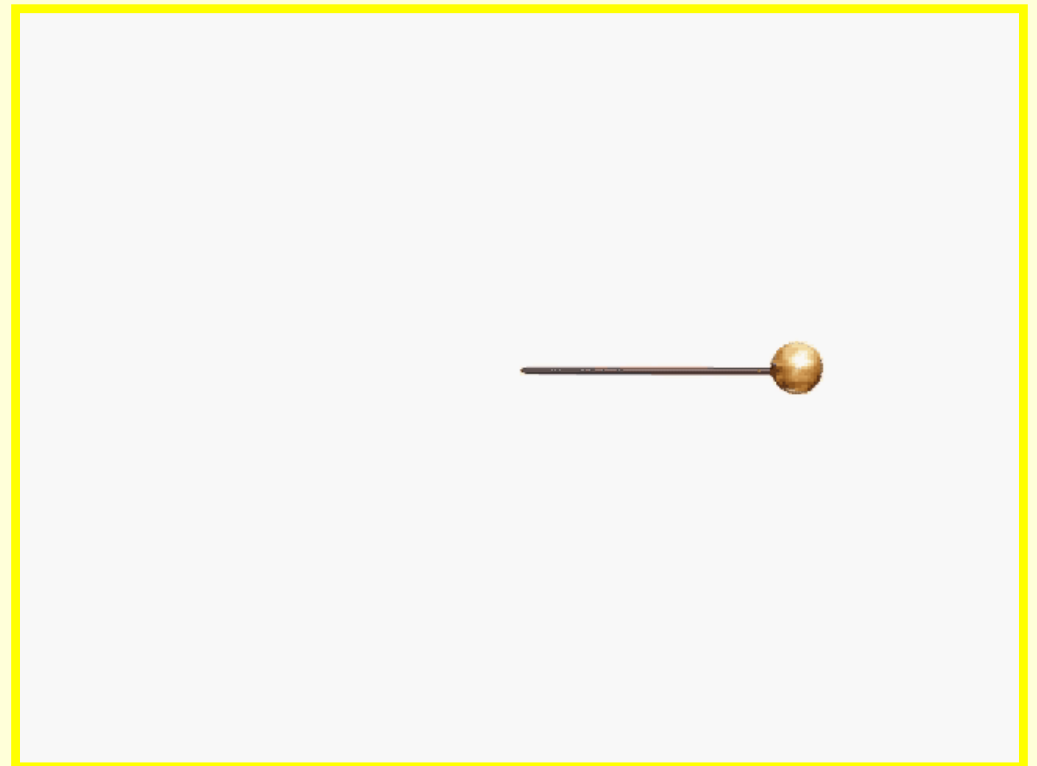
円運動をさせるためには？

中心向きに力を加えればいい。
この回転させようとする力を**向心力**という。



$$F = ma = m \frac{v^2}{r}$$

回転している物体に乗っている人には、向心力は感じないため、あたかも向心力と釣り合う力のみに働いているように見える。これを**遠心力**という。



太陽系



双子星



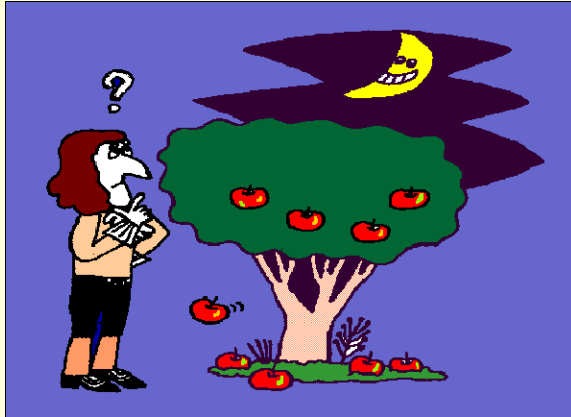
双子星の重力



地球と月



万有引力の法則



「林檎は落ちるのに何故、月は落ちないのか？」

実際には遠心力と、場所により半径 R_E が異なることから、重力加速度は変化する。

重力加速度[m/s²]

札幌 9.8047757

東京 9.7976319

同じ質量の人が同じ体重計で測ると、札幌の方が0.07%重くなる。

「全ての粒子は引き合っており、その力は、距離の2乗に反比例し、質量に比例する。」

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ここで、 G は万有引力定数で、 $G = 6.673 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2/\text{kg}^2]$ である。地球を質量 M_E の1つの質点、半径を R_E とすると、表面上にある質量 m の物体との間に働く力は、

$$F = G \frac{m M_E}{R_E^2} = \left(\frac{G M_E}{R_E^2} \right) m$$

これより、重力加速度 g は、

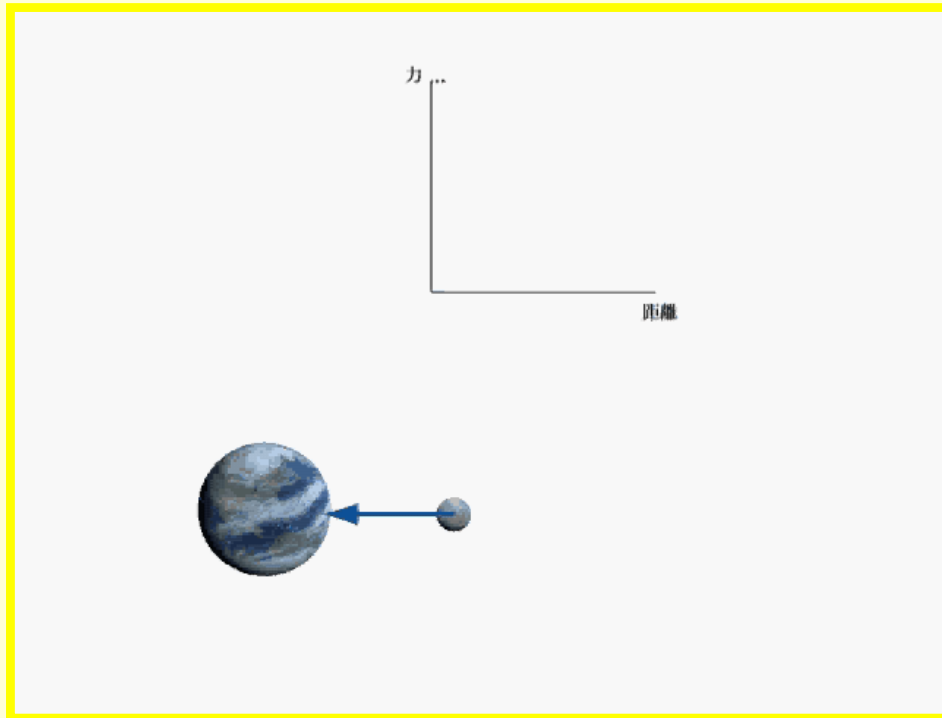
$$g = \frac{G M_E}{R_E^2}$$

となる。

スウィングバイ



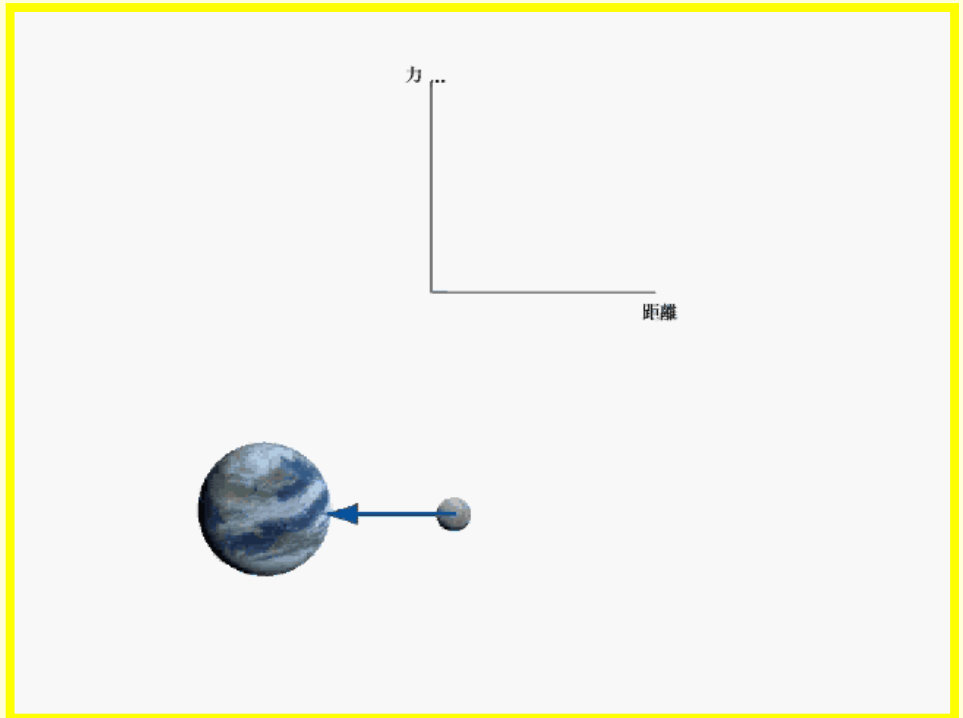
重力のポテンシャルエネルギー



地球から半径 r の点から非常に離れた位置まで物体を運ぶのに必要な仕事は、

$$\int_r^{\infty} F(r') dr' = G \frac{M_E m}{r}$$

となる。つまり、この半径 r の点よりも無限遠方(万有引力



が0)の点の方が、万有引力のポテンシャルエネルギーが、

$$U = G \frac{M_E m}{r}$$

だけ多い。

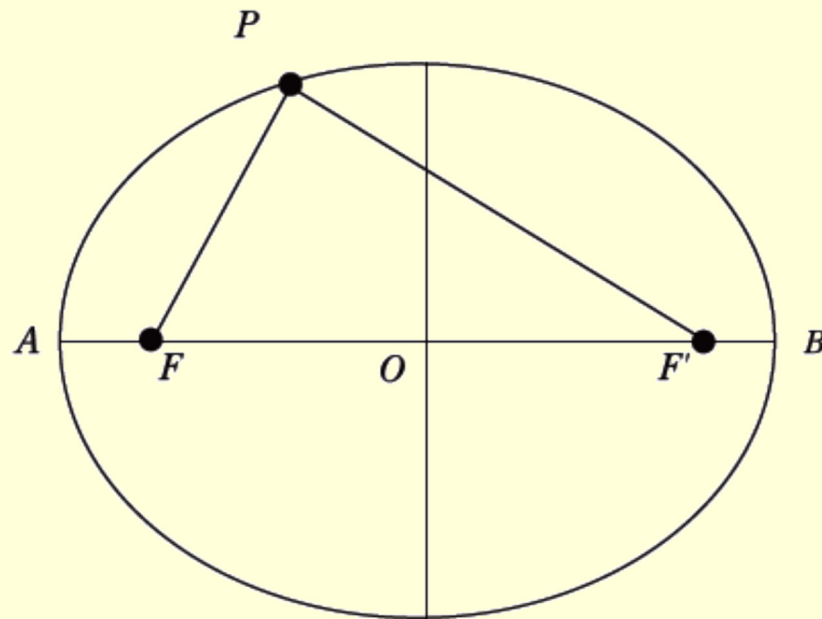
※ 高いところの方がポテンシャルエネルギーが多い！

ケプラーの法則

第一法則： すべての惑星の運動は、太陽を一つの焦点とする楕円運動である。

第二法則： 太陽から惑星に向かう線の運動は、単位時間あたり同じ面積を通過する。

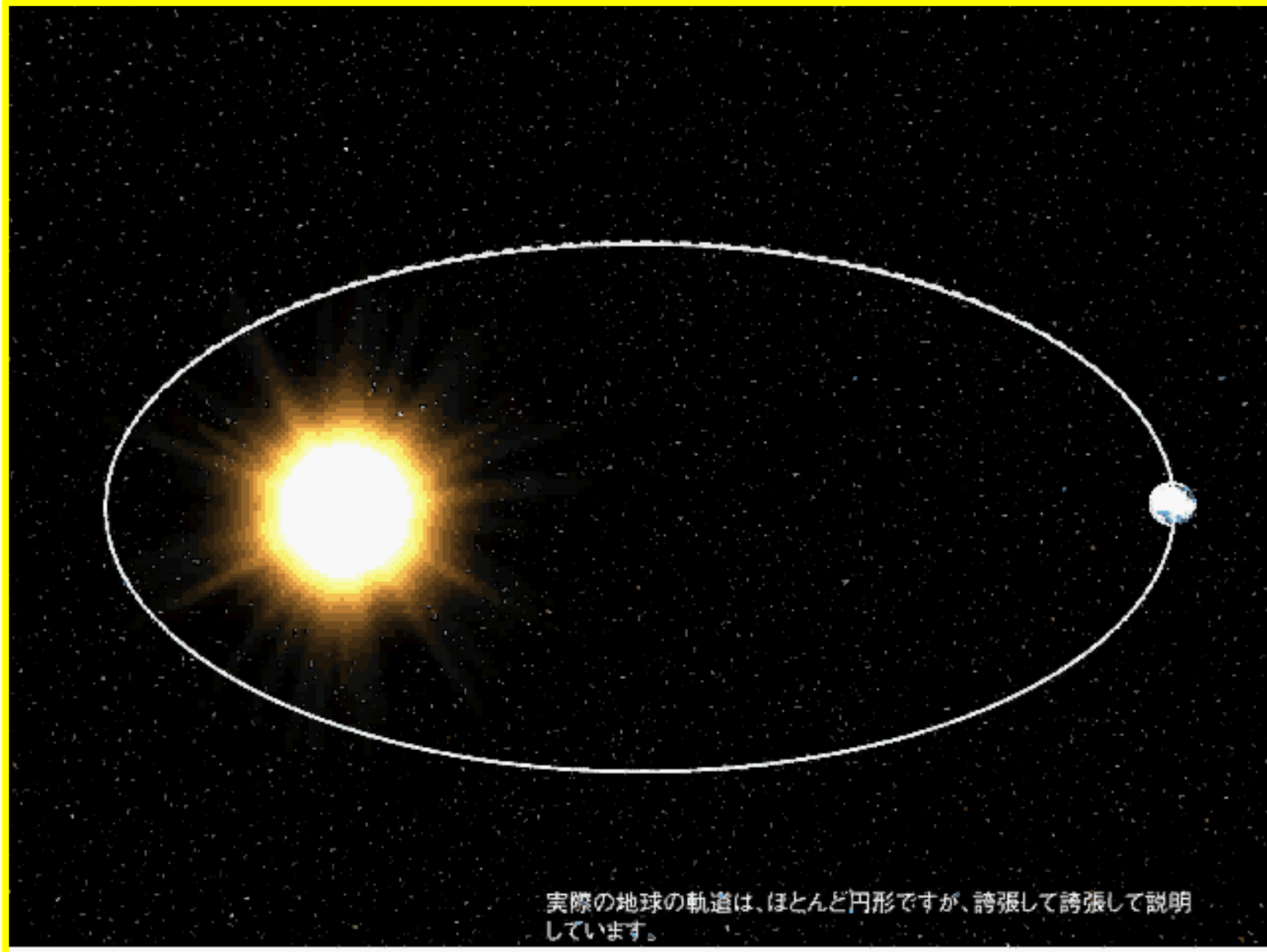
第三法則： 惑星の周期の2乗は太陽と惑星の間の平均距離の3乗に比例する。



楕円とは、2つの焦点 F 、 F' からの距離の和が等しい点の集合。

ケプラーの第2法則

面積速度一定の法則



ケプラーの第3法則

惑星の周期の2乗は太陽と惑星の間の平均距離の3乗に比例する。

