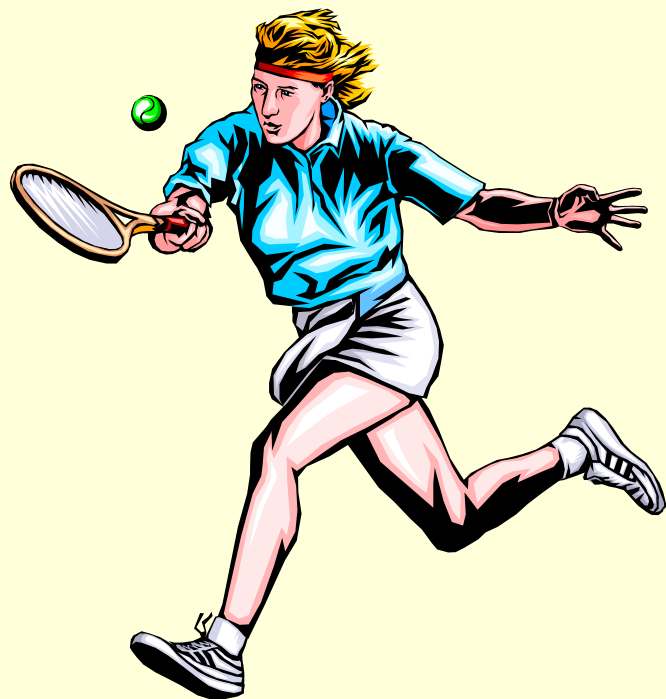


第6章 力積と運動量



ボールを蹴るとボールが飛んでいく

どのように蹴ると、良く飛ぶんだろう？

蹴る場所によって飛び方は変わるか？

蹴ったときに、脚からボールに与えたのは何？



力積

2つの物体の衝突や打撃を考えるときは、どれくらいの力をどれくらいの時間与えたかが重要になる。例えば、図のように高いところから飛び降りたときは、直立して着地するより、膝を曲げて着地する方が脚に力がかかる時間を長くすることができる分、相対的に力を弱くすることができる。このような力の大きさと力の働く時間の積を力積という。

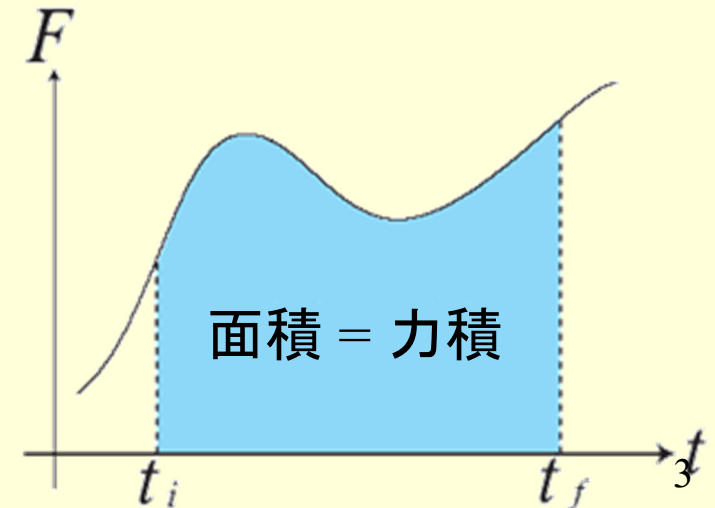
図のように時刻 t_i から t_f までの間に力 F が変化する場合、力積 I は、

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

のように表すことができる。



時間	長い	短い
力	小さい	大きい



力積と運動量

質量 m の物体に力 F を加えると、速度 v が変化する。物体の運動は $F = ma$ で表わすことができ、加速度 a は dv/dt と書くことができるので、両辺に dt をかけると、

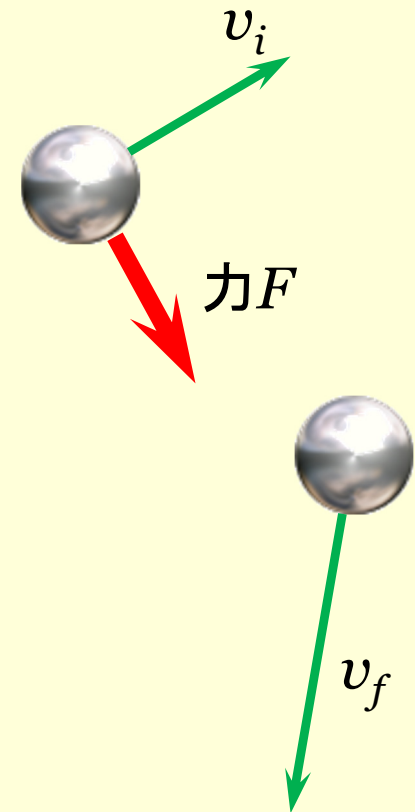
$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \rightarrow Fdt = m dv$$

となる。例えば、時刻が t_i から t_f の間に、速度が v_i から v_f まで変化したとすると、上の式は、

$$\int_{t_i}^{t_f} F dt = \int_{v_i}^{v_f} m dv = mv_f - mv_i$$

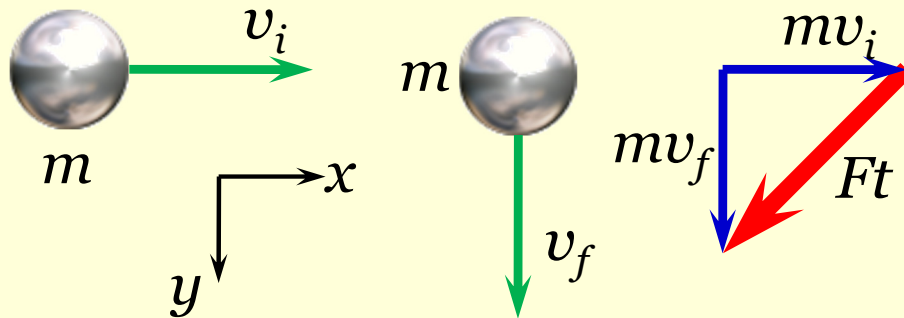
と表すことができ、物体に与えた力積は mv の差で表すことができることがわかる。この $p = mv$ を**運動量**といい、**物体の動かしにくさ、止めにくさの指標**として用いられる。つまり、重くて速い物体ほど止めるのに大きな力積を必要とする。実際には、力も速度もベクトルなので、

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{v_i}^{v_f} m d\vec{v} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$



力積・運動量とロケット

宇宙空間でロケットを制御するには力積と運動量の関係がとても重要である。



例えば、図のように質量 $m = 7[\text{kg}]$ のロケットが、 $v_i = 5[\text{m/s}]$ で慣性飛行しているとき、90度角度の異なる方向に $v_f = 5[\text{m/s}]$ で飛ぶためには、図の赤い矢印の方向に噴射すれば良いことになる。力積と運動量の関係から、

x 軸方向:

$$F_x t = mv_f - mv_i = 0 - 7 \times 5 = -35$$

y 軸方向:

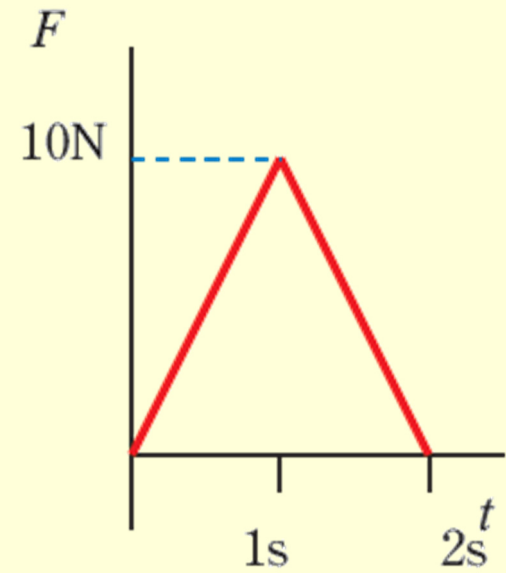
$$F_y t = mv_f - mv_i = 7 \times 5 - 0 = 35$$



噴射によって得られる力 F が $50[\text{N}]$ だとすると、 x 軸、 y 軸、それぞれの方向の分力は $35[\text{N}]$ なので、噴射に必要な時間 t は、 $1[\text{s}]$ となる。

例題

1[kg]の物体に図のように力を加えた。2秒後の速度を求めなさい。



運動量の保存

運動靴を履いて摩擦を保ちながら、手押し車を押すと、人が車に外部から力を与えたことになる。ところが、よく滑る氷上でローラースケートを履いて手押し車を突き放すと、双方がはじかれてそれぞれ反対向きに異なった速度で離れる。つまり、外界から他に影響を受けない状態であれば、**作用・反作用は向きが逆で大きさが同じなので、力積は符号が逆で大きさが同じということになる。**



$$\int F_{21} dt = \int m_1 dv_1$$

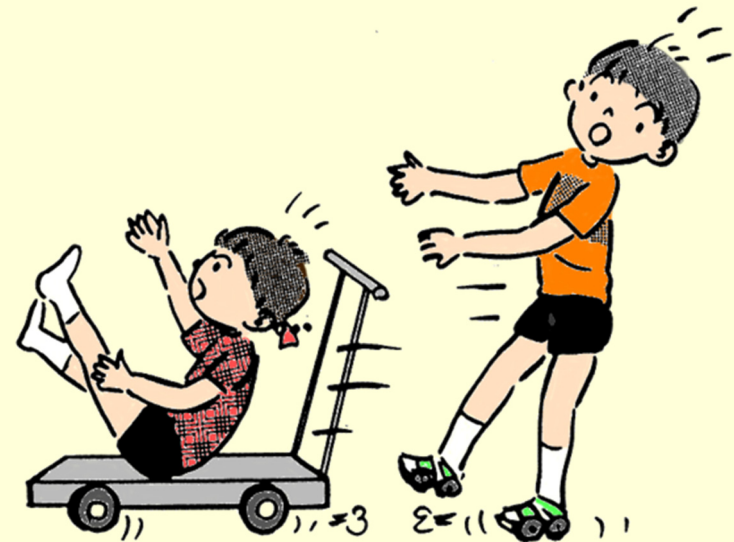
$$\int F_{12} dt = \int m_2 dv_2$$

$$\int F_{21} dt = -\int F_{12} dt$$

したがって、

$$\int m_1 dv_1 = -\int m_2 dv_2$$

となる。



運動量の保存

ここで力を加える前後の速度をそれぞれ v_{1i} 、 v_{1f} 、 v_{2i} 、 v_{2f} とすると、

$$\int m_1 dv_1 = -\int m_2 dv_2$$

は、 $m_1(v_{1f} - v_{1i}) = -m_2(v_{2f} - v_{2i})$ となり、

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

となる。すなわち、力を加える**前後の運動量の総和は等しい**ことになる。これを**運動量保存の法則**という。

もし、力を加える前に静止してた場合は、
 $v_{1i} = v_{2i} = 0$ となり、

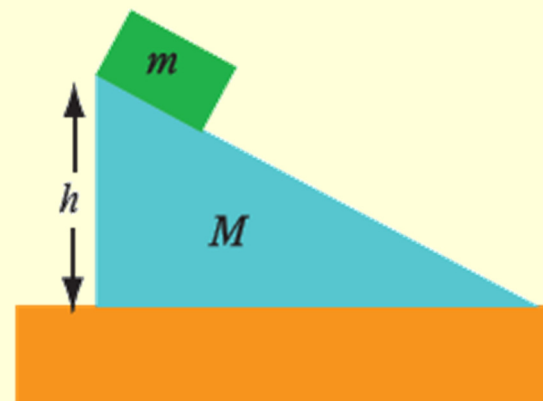
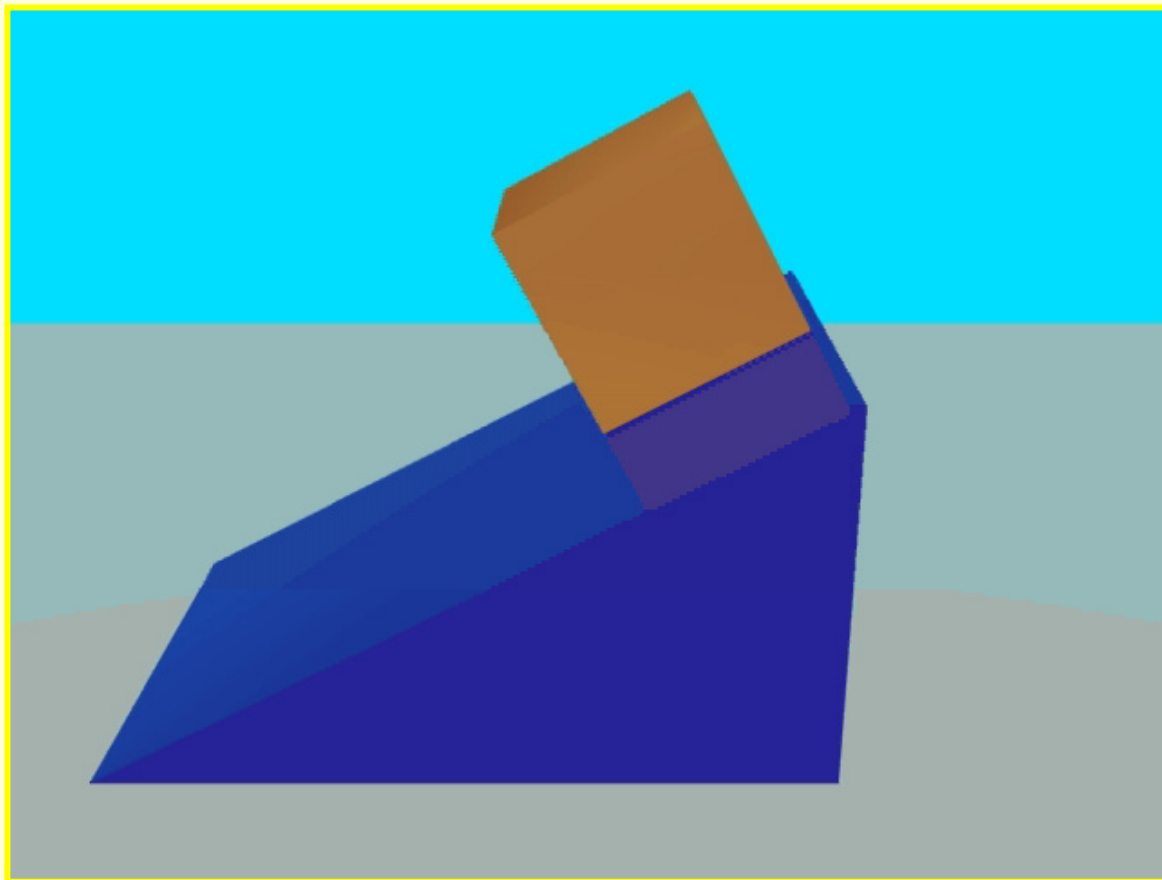
$$m_1 v_{1f} = -m_2 v_{2f}$$

となる。すなわち「互いの速度はその物体の質量に反比例する。」ことがわかる。大きなボートから飛び込むときボートはほとんど動かないが、小さなボートの場合は反対方向に強く動かされる。



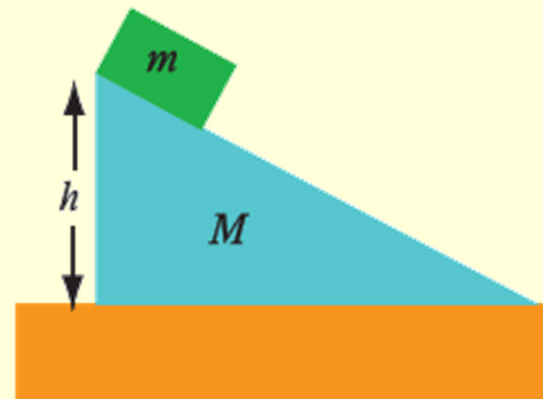
例題

図のようになめらかな床の上に、自由に動ける質量 M の斜面がある。この斜面を質量 m の箱が高さ h のところからなめらかに滑り落ちた。滑り降りたときの箱の速度を求めなさい。

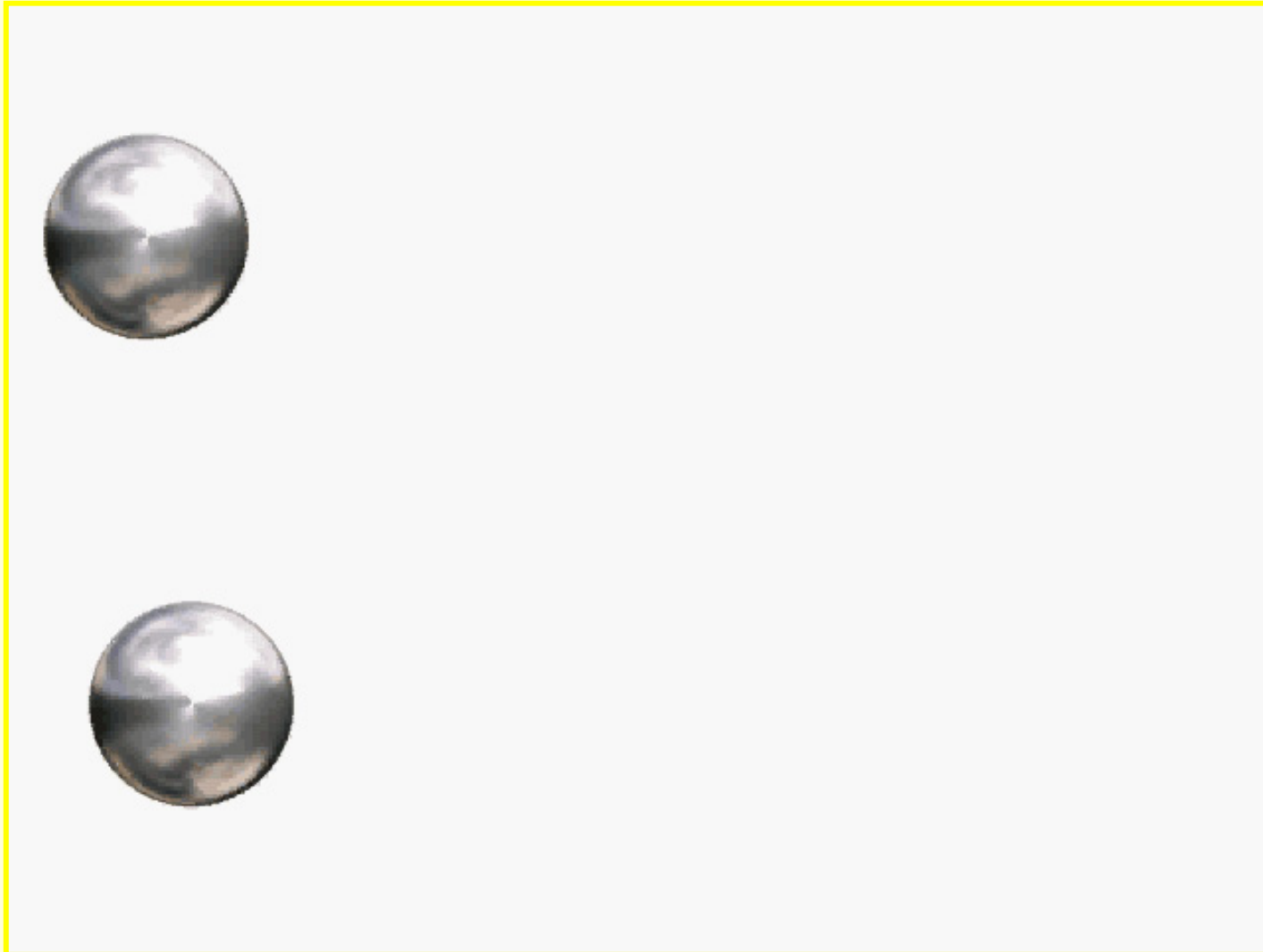


例題

図のようになめらかな床の上に、自由に動ける質量 M の斜面がある。この斜面を質量 m の箱が高さ h のところからなめらかに滑り落ちた。滑り降りたときの箱の速度を求めなさい。



運動量の保存



衝突

運動量保存の法則やエネルギー保存の法則は理想的に熱や物体の変形による消失分を無視している。いま、2個の物体 m_1 と m_2 が衝突するとき、衝突前後の速さをそれぞれ v_{1i} 、 v_{2i} と、 v_{1f} 、 v_{2f} とすると、速度の比 e は、

$$e = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}} \quad (0 \leq e \leq 1)$$

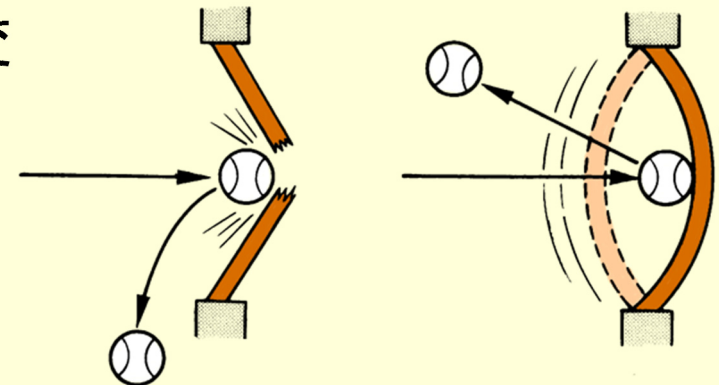
と表すことができる。この e を**はね返り係数**という。 $e = 1$ の状態を「**完全弾性衝突**」といい、 $e < 1$ の場合を「**非弾性衝突**」という。運動量保存の法則から、衝突前後のエネルギー変化 $E_i - E_f$ は、

$$E_i - E_f = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1i} - v_{2i})^2 (1 - e^2) \geq 0$$

となり、非弾性衝突のときは運動エネルギーが減少することがわかる。

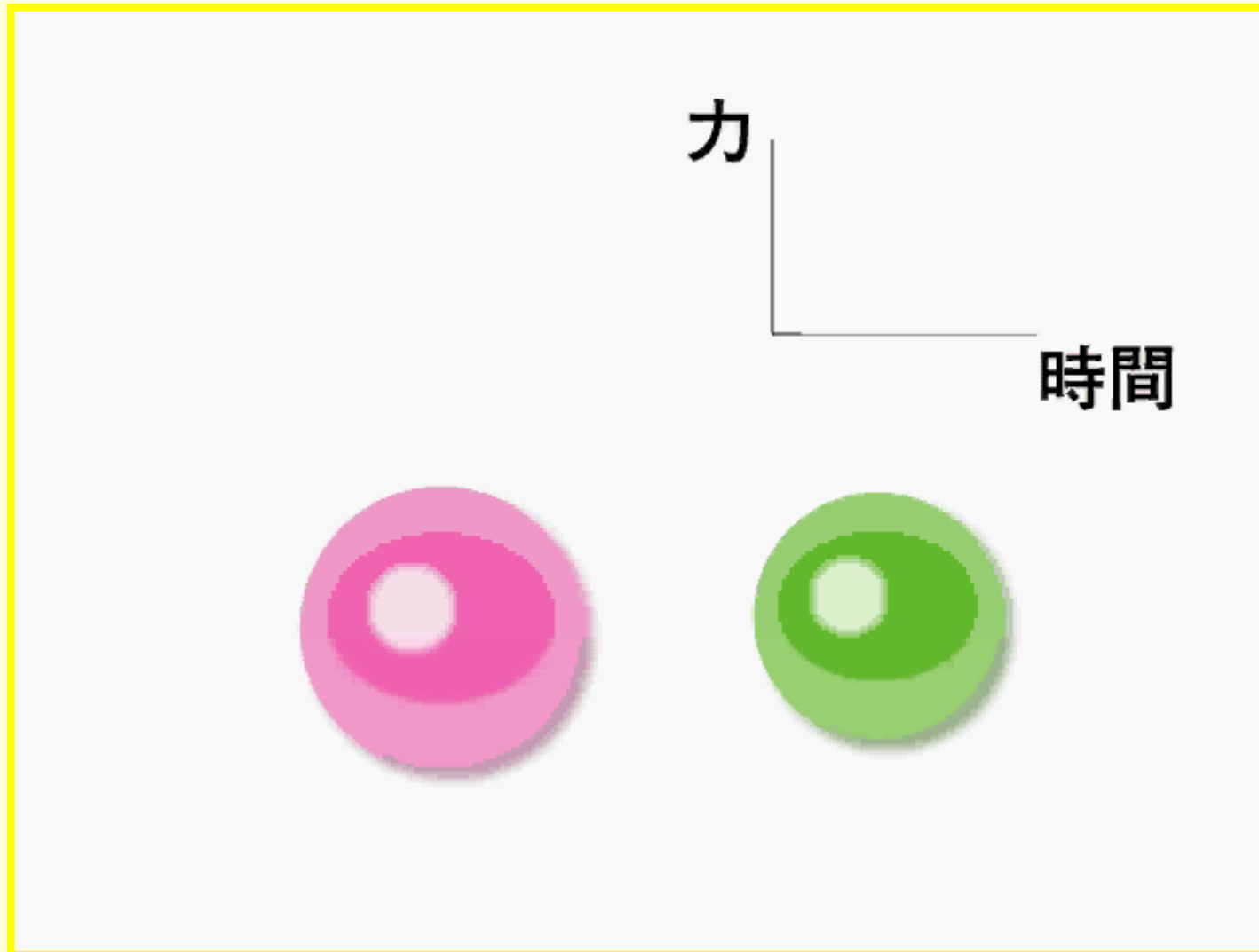


デッドボールは、遠くに跳ねるほど一般に傷が軽い。



板が割れて球の運動量を吸収すると、球は遠くに跳ね返らない

はね返り係数



完全非弾性衝突

非弾性衝突の中でも、 $e = 0$ のときを特に**完全非弾性衝突**という。このとき、

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = 0$$

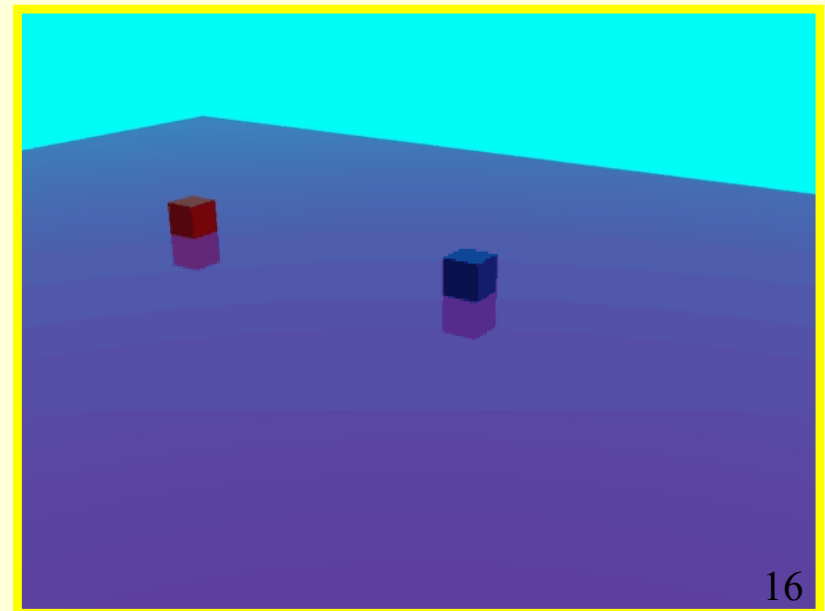
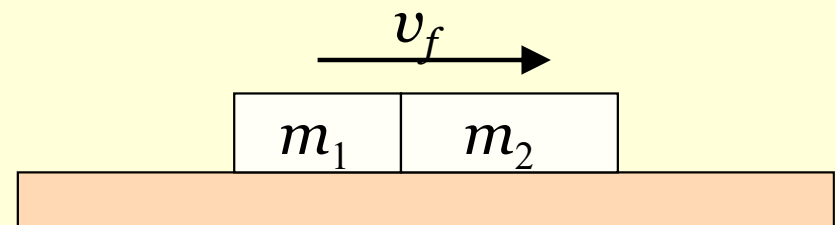
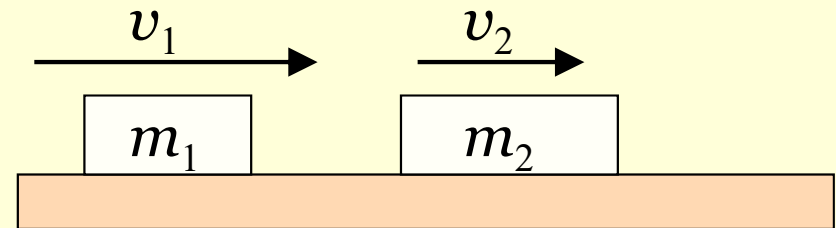
なので、 $v_{2f} - v_{1f} = 0$ 、すなわち2つの物体の最終速度は同じ v_f となる。このとき、運動量の保存より、

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

となり、最終速度は、

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

となる。



完全弾性衝突

完全弾性衝突 ($e = 1$) では、エネルギーの保存と運動量の保存が成り立つので、

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

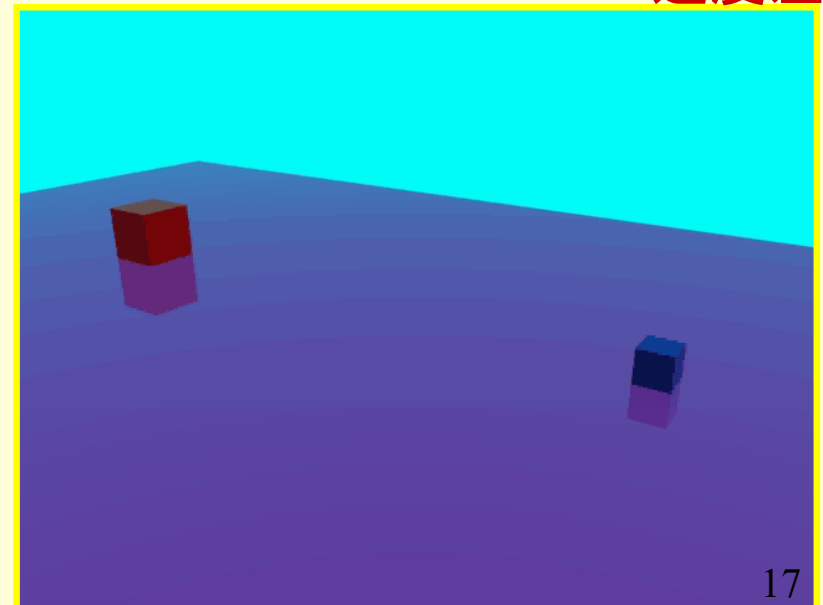
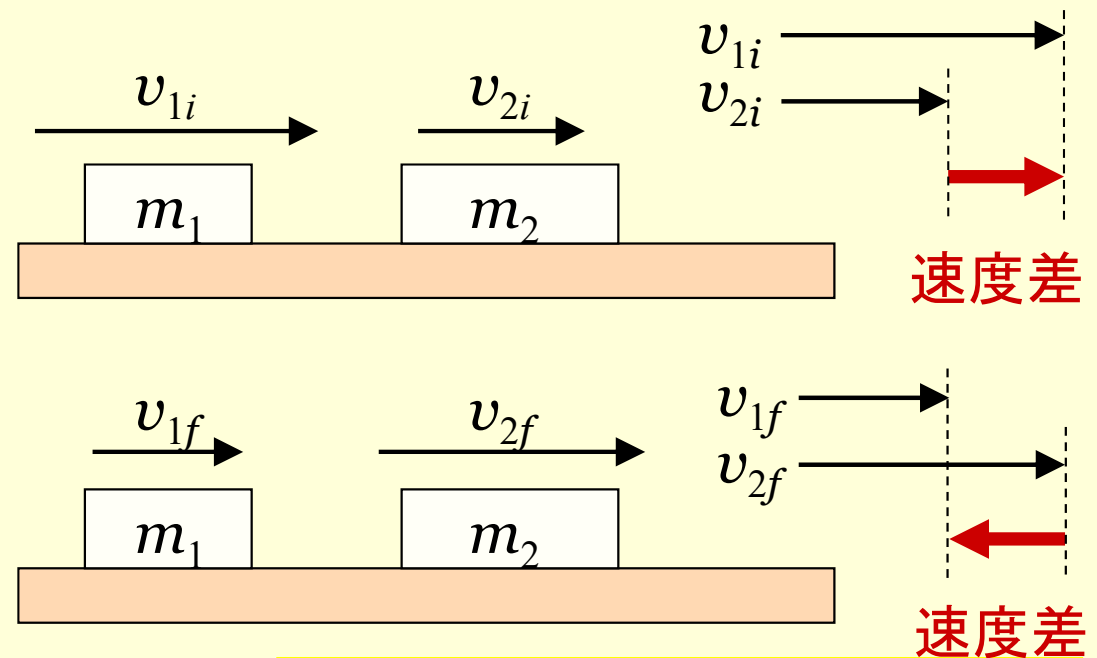
$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i}$$

$$= m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

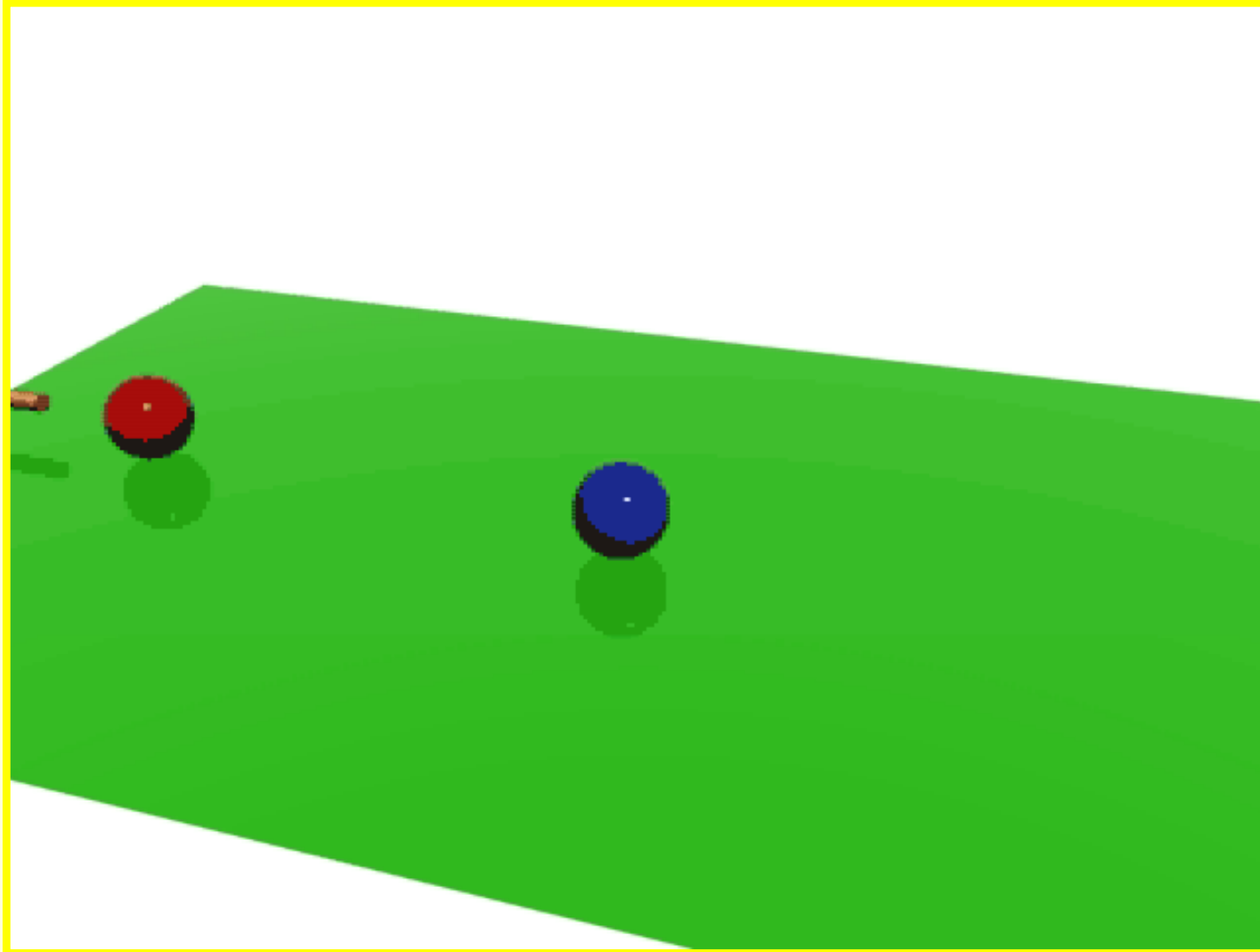
となり、これを解くと、

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

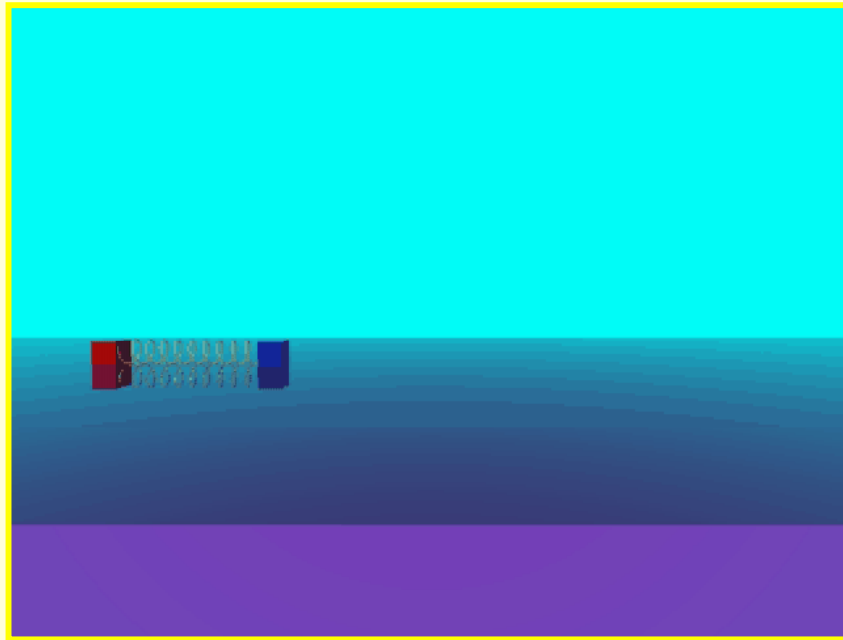
$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$



斜方衝突

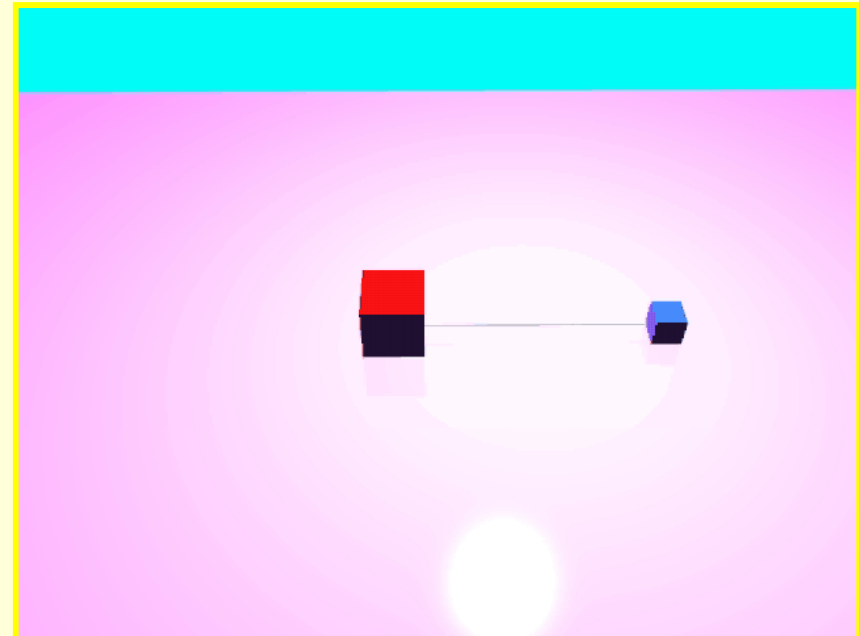
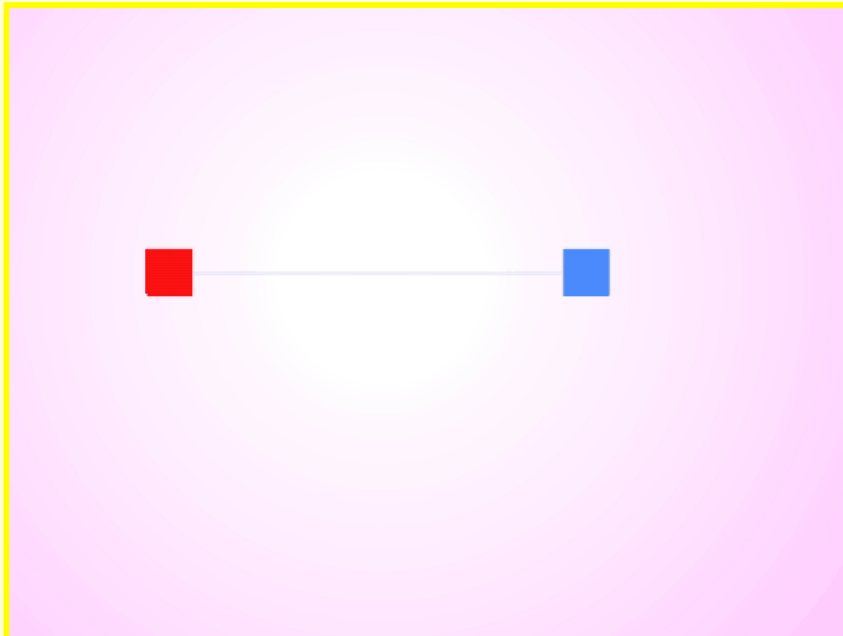


重心



外から力を受けないと、
中心の位置は、等速直線
運動する？！

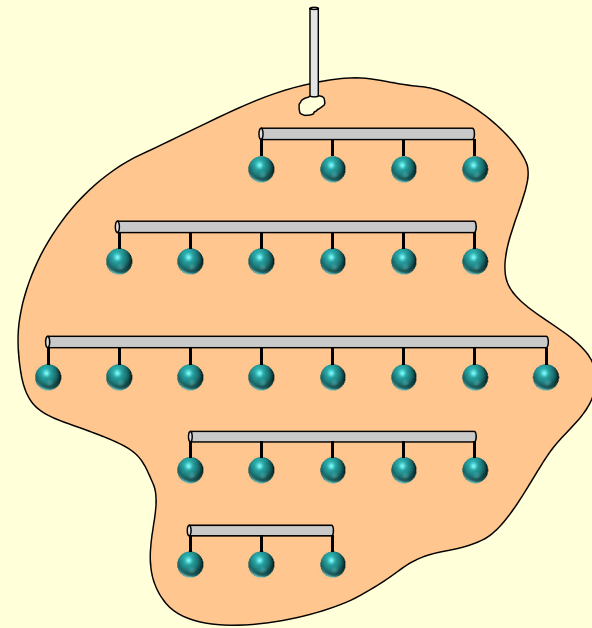
この中心を**重心**という。



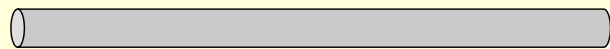
天秤の重心

天秤では、重さのない棒の支点をはさんで両側に重りが下がっているときのバランスを考えた。

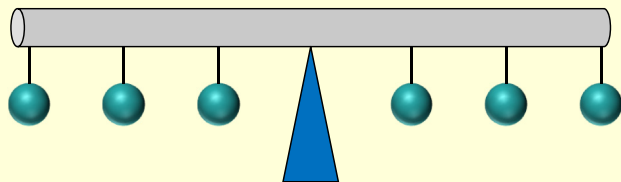
(a)のような長い棒を1本の指で支えるときは、ほぼ中心を持って左右のバランスをみながら指の位置をさがす。左右に等しい重りをつけるときには、中心点が支点となって左右のバランスがとれ(b)、棒は平行を保つ。複雑な右図のモビールも(c)、左右のテコのつり合いを考えると(d)となる。



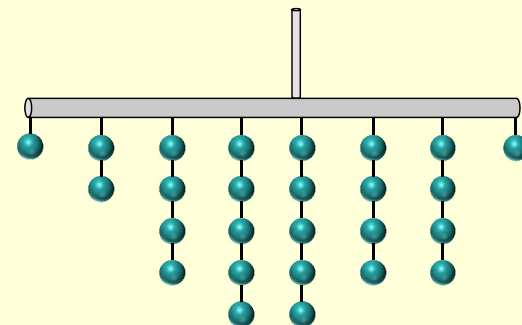
(c)



(a)

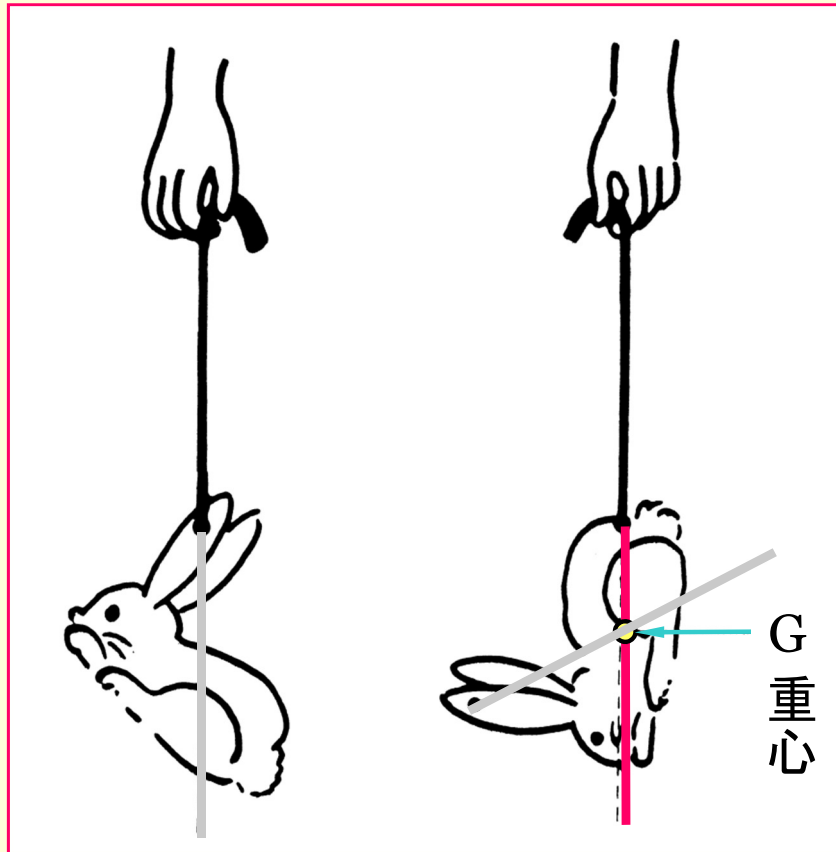


(b)



(d)

重心の求め方



質量 m_1 、 m_2 、位置 $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ にある2つの物体の重心の位置 $\vec{R}_{CM}$ は、

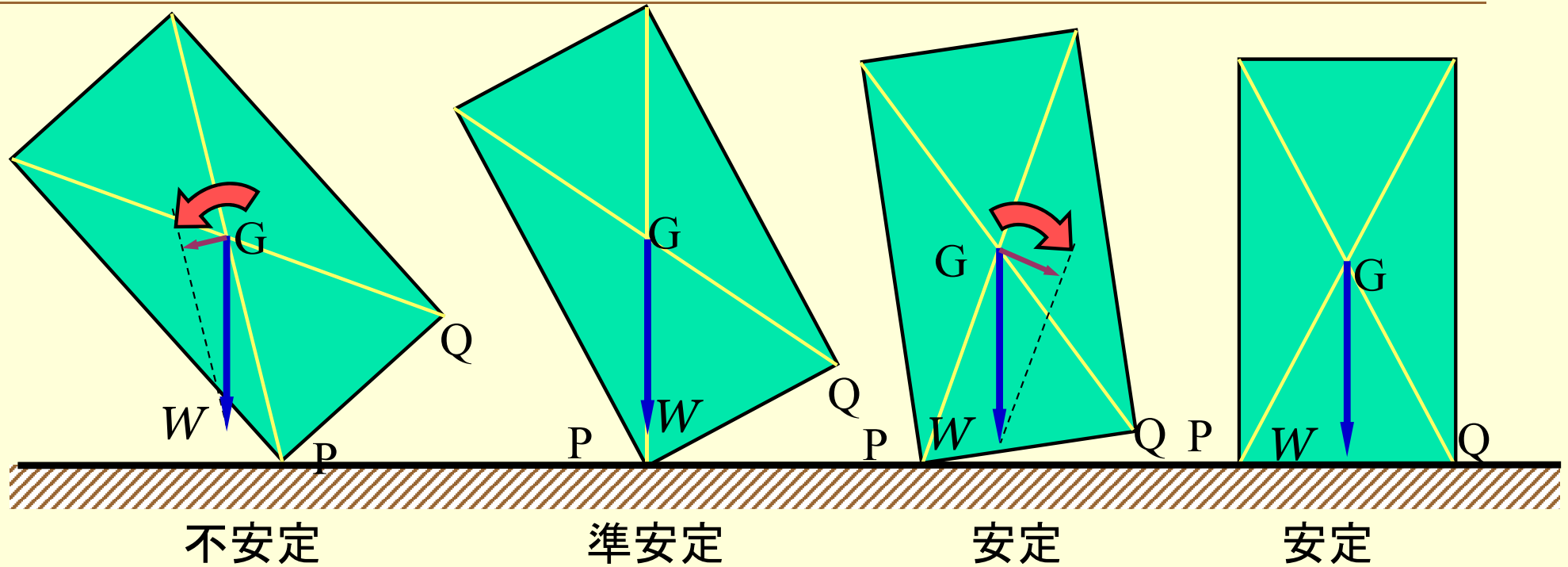
$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

で求められる。この式は、質点の数が増えてもそのまま拡張することができる。

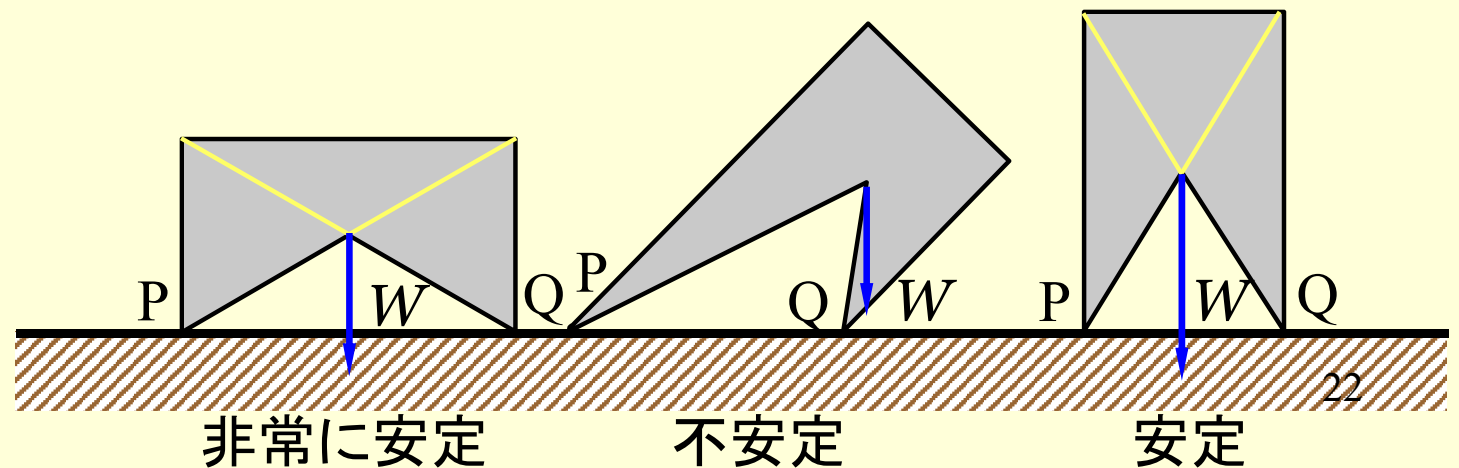
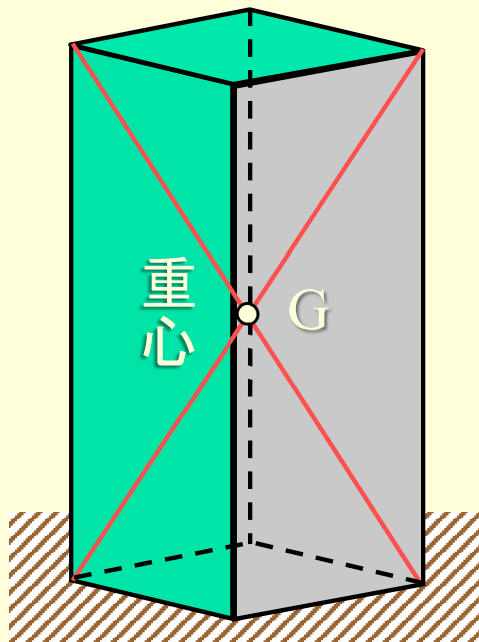
$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

形の複雑な物体の重心は、1点からヒモで物体をつるし、ヒモの線上を見極めてから、別な1点からつるして同じ操作をし、それぞれの交点を求める。この交点が物体の重心となる。

箱形物体の重心位置と安定限界

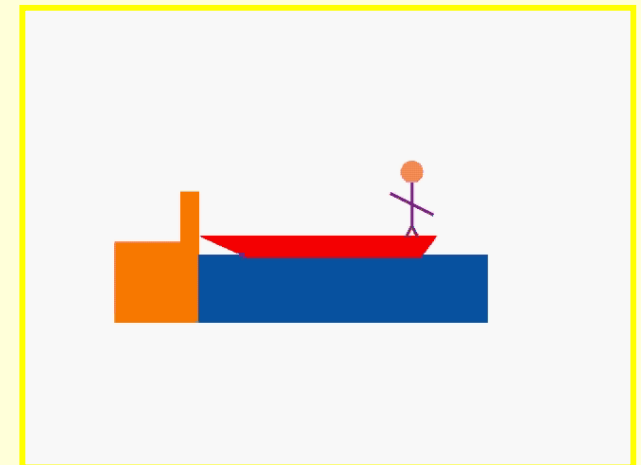


色々な物体の重心位置と安定限界

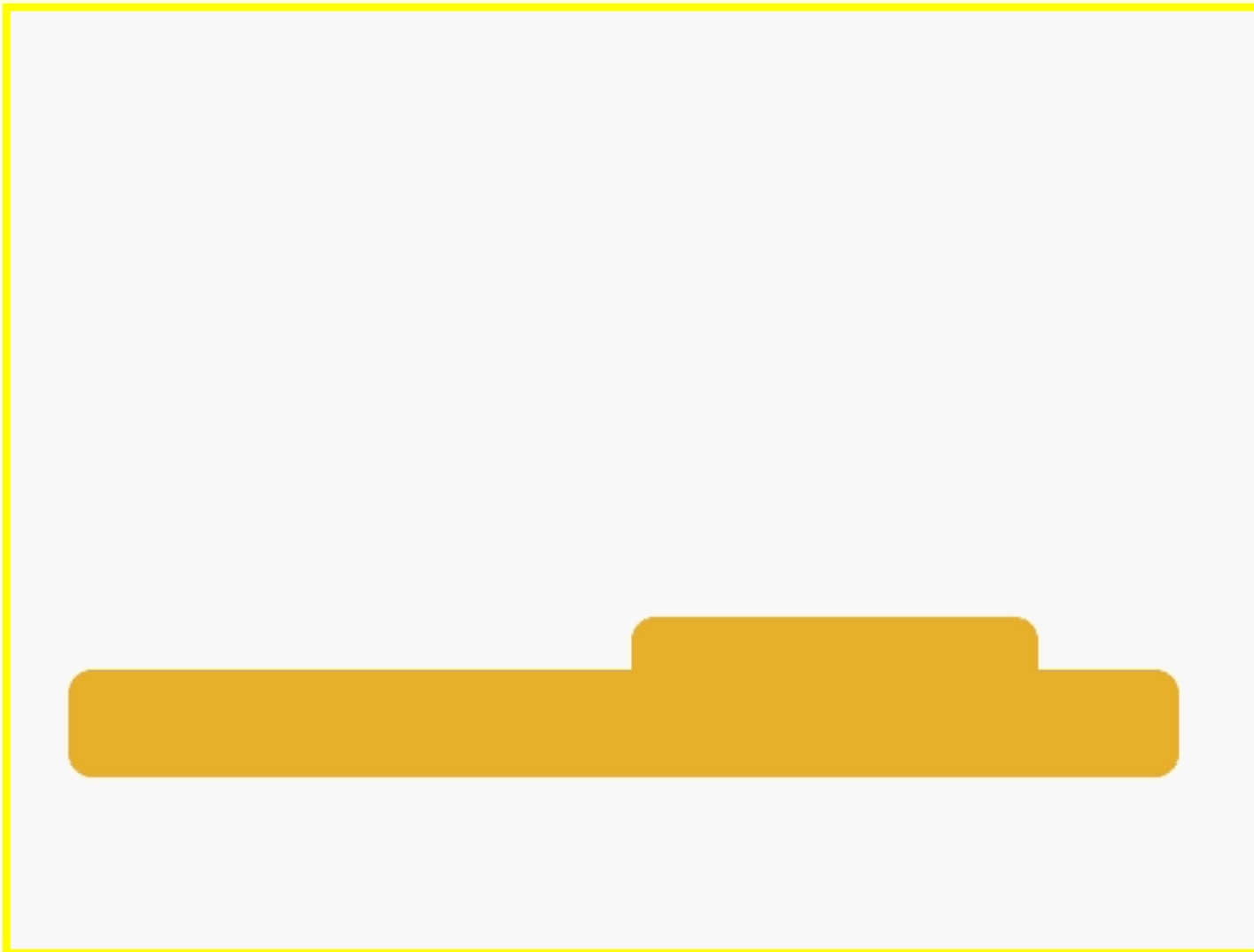


例題

図のように全長4[m]のボートの後方にのって船に岸につけた。乗っている人の体重は60[kg]であり、船の質量は60[kg]である。船を岸につなぐために乗っている人が船の先頭に向かって移動していくと、船は岸から離れた。船の先頭にきたときに船は岸からどのくらい離れるか？船の重心は船の中心の位置にあるとする。



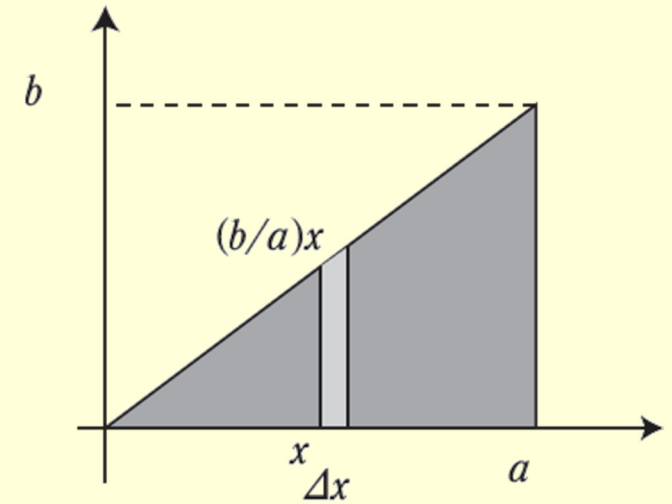
重心



$$x_{CG} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

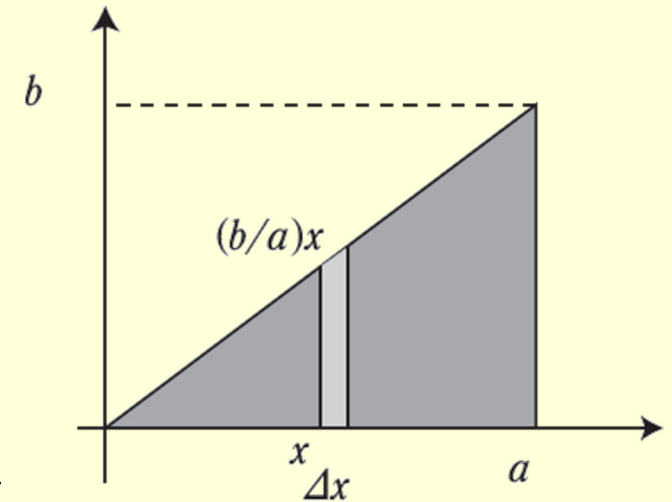
例題

図のように均質な金属でできた直角三角形の板がある。重心の位置を求めなさい。



例題

図のように均質な金属でできた直角三角形の板がある。重心の位置を求めなさい。



x 方向の重心の位置を求めている。図の x から $x + \Delta x$ の区間の面積は、 $(b / a) x \Delta x$ である。単位面積あたりの質量を ρ とすると、この区間にある質量 Δm は $\Delta m = \rho (b / a) x \Delta x$ である。よって、

$$\sum x \Delta m = \sum \rho \frac{b}{a} x^2 \Delta x = \int_0^a \rho \frac{b}{a} x^2 dx = \frac{1}{3} \rho a^2 b$$

$$\sum \Delta m = \sum \rho \frac{b}{a} x \Delta x = \int_0^a \rho \frac{b}{a} x dx = \frac{1}{2} \rho a b$$

より、

$$\frac{\sum x \Delta m}{\sum \Delta m} = \frac{2}{3} a$$

