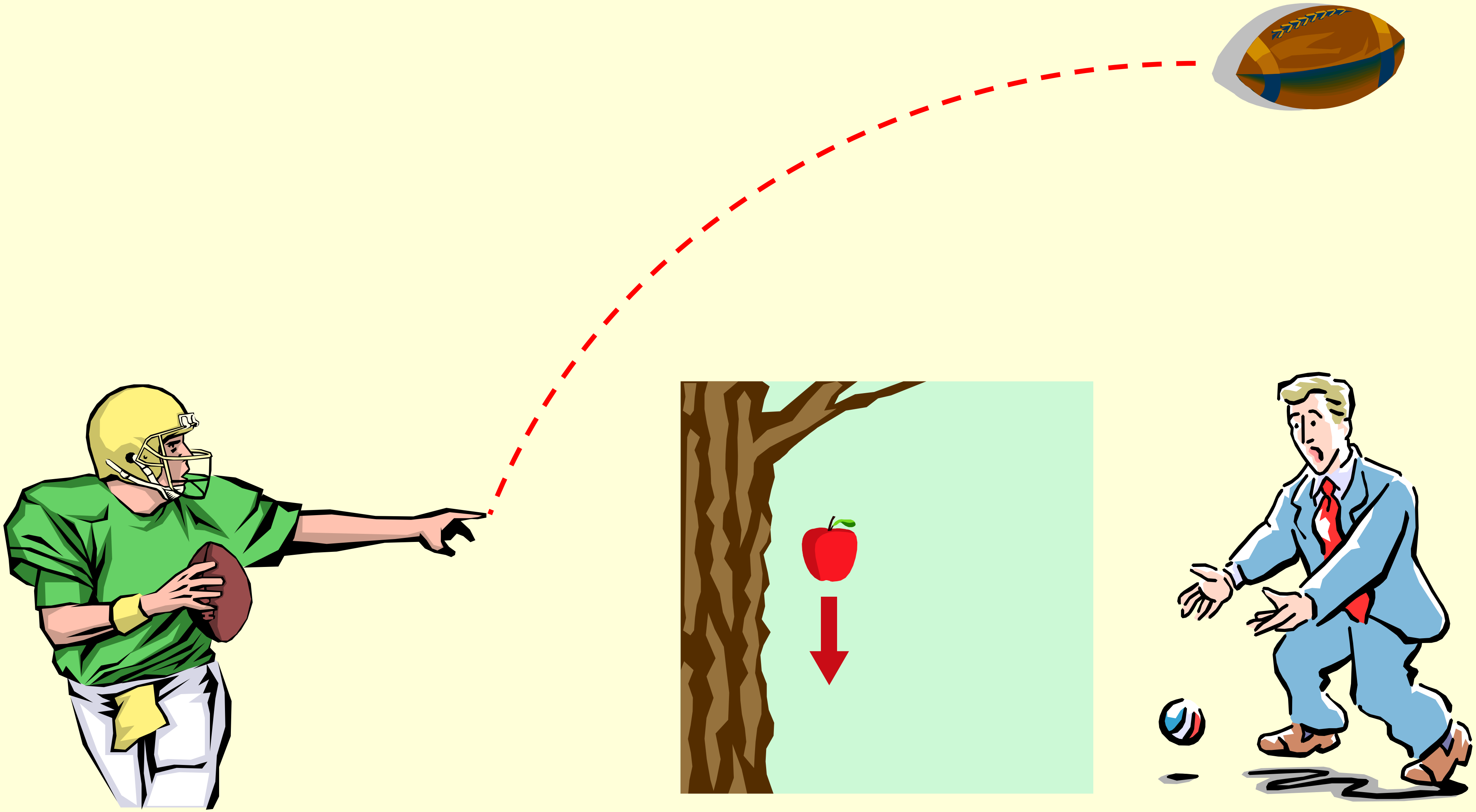
第2章　二次元以上の運動



等加速度直線運動（復習）

物体が地上に落下する運動(自由落下)や，電車が加速や減速するときに近似的に実現されるのが**等加速度運動**である。

運動の進行方向をx軸，一定の加速度をaとすると，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a$$

これを時間tで積分すると速度vが，さらに積分すると変位xが求まる。

速度 $v=\dfrac{dx}{dt}=\int a\mathrm{dt}=at+c_1$ → t=0の時の速度

変位 $x=\int v\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}at^2+c_1t+c_2$ → t=0の時の変位

等加速度直線運動(復習)

初速度($t=0$のときの速度)v_0, 初期変位x_0とすると,

速度 $\boxed{v = at + v_0}$

変位 $\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$

自由落下のときは, 加速度$a = g$, $v_0 = 0$, $x_0 = 0$なので,

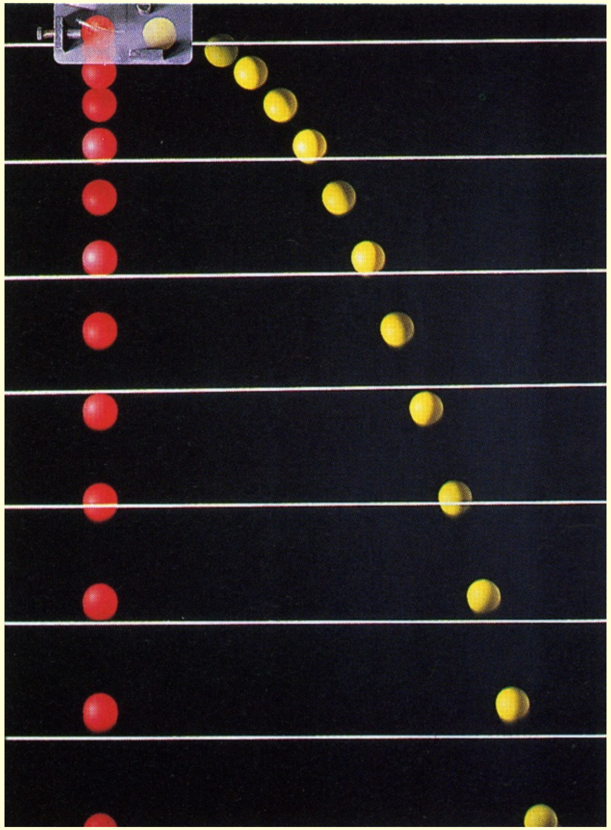
速度 $\boxed{v = gt}$ (ただし, $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$)

変位 $\boxed{x = \frac{1}{2}gt^2}$

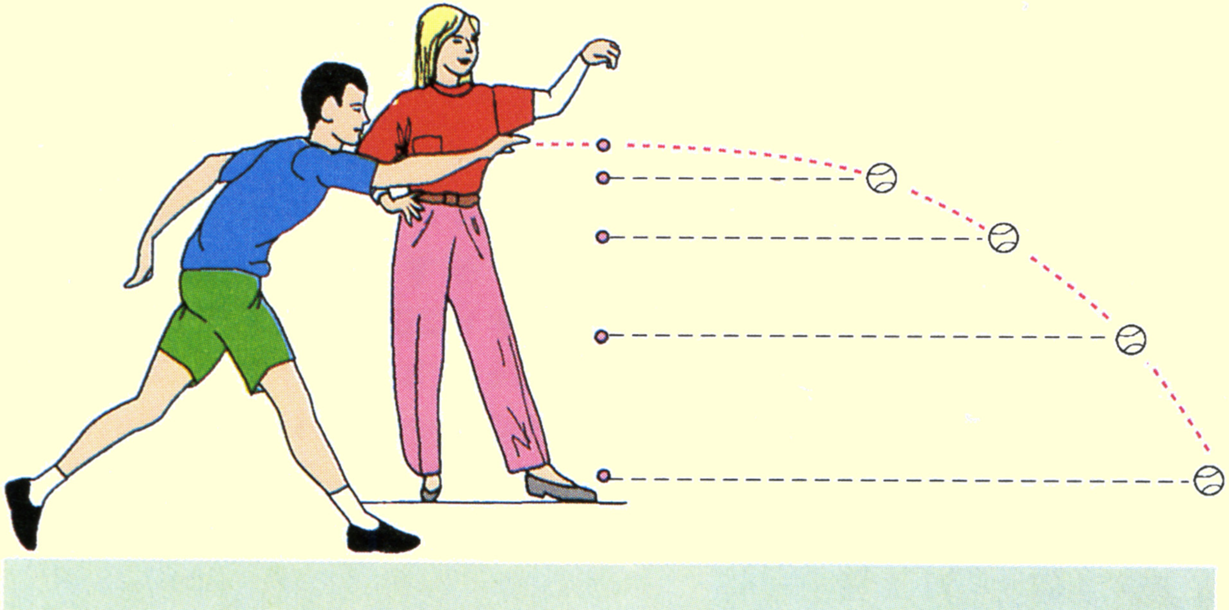
この自由落下の法則を「**落体の法則**」という。

平面内（2次元）の運動

鉛直方向での放物体の運動（自由落下）は一直線上（1次元）である。しかし，**多くの運動は平面内（2次元）で起こる。**

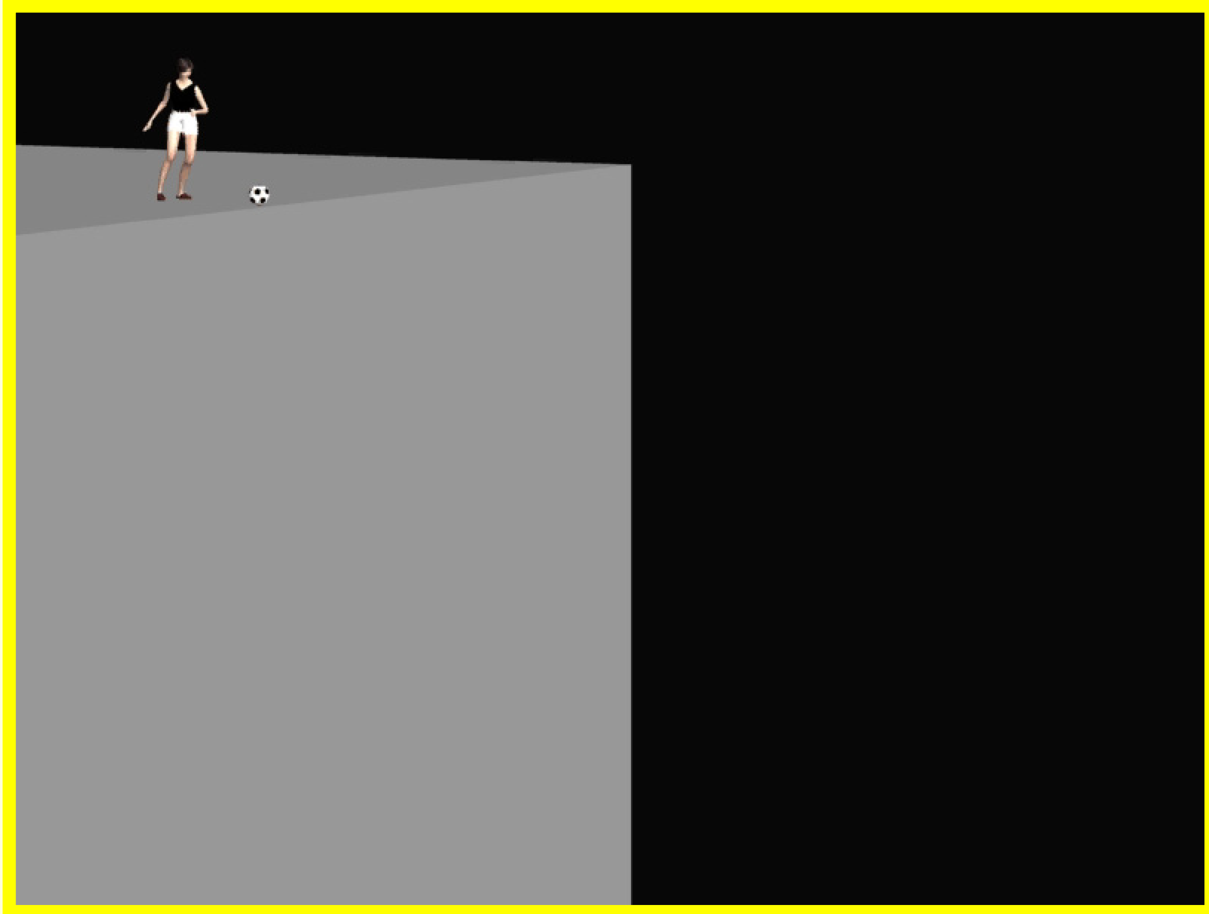


自由落下の球も水平に投げ出されたボールも同時間に同高さの位置にある。



投げたボールの運動

　ボールやスペースシャトルはどのような軌跡を描いて飛ぶだろうか？



丘の上からボールを投げる（蹴る）と？

　直線的に落ちる落下運動と違う。

運動の方向は

　下（鉛直方向）と

　横（水平方向）！

ボールの動き

まず，よく観察しよう　⇒ 実験

ボールはどう落ちるか，ストロボ写真で調べよう

落 下 と ど こ が 違 う の か？

落下距離は⇒ 同じ

横の距離は⇒ 違う

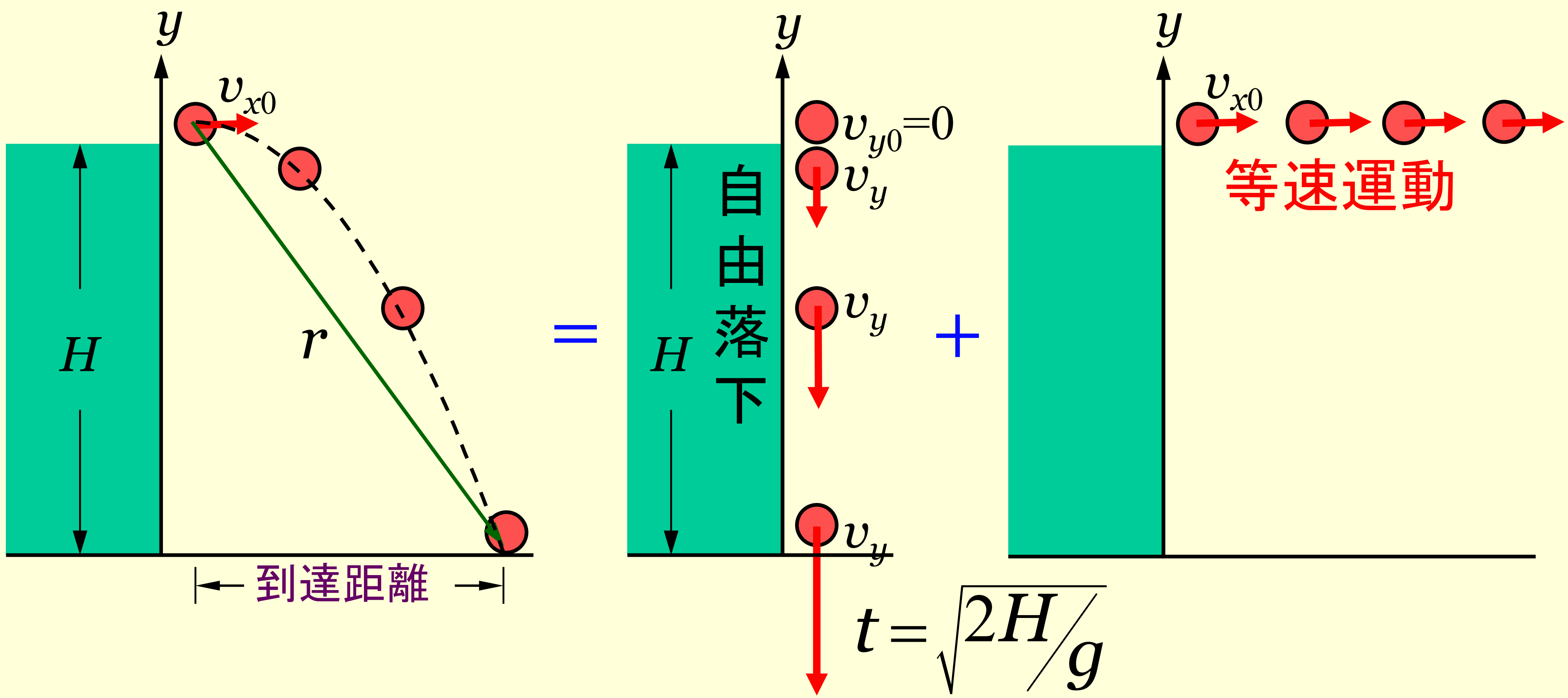
横方向の運動

どのように違う？

水平投射

(a)図のように水平に投げ出した物体の運動は，(b)図と(c)図のようにy方向の自由落下とx方向の等速運動という2つの運動成分の組み合わせである。

$$r_v = \frac{1}{2} g t^2 \qquad r_h = v_0 t$$



平面の運動とは？ －Galileoのアイデア－

1）水平方向（x軸）と鉛直方向（y軸）の二つの運動に分解

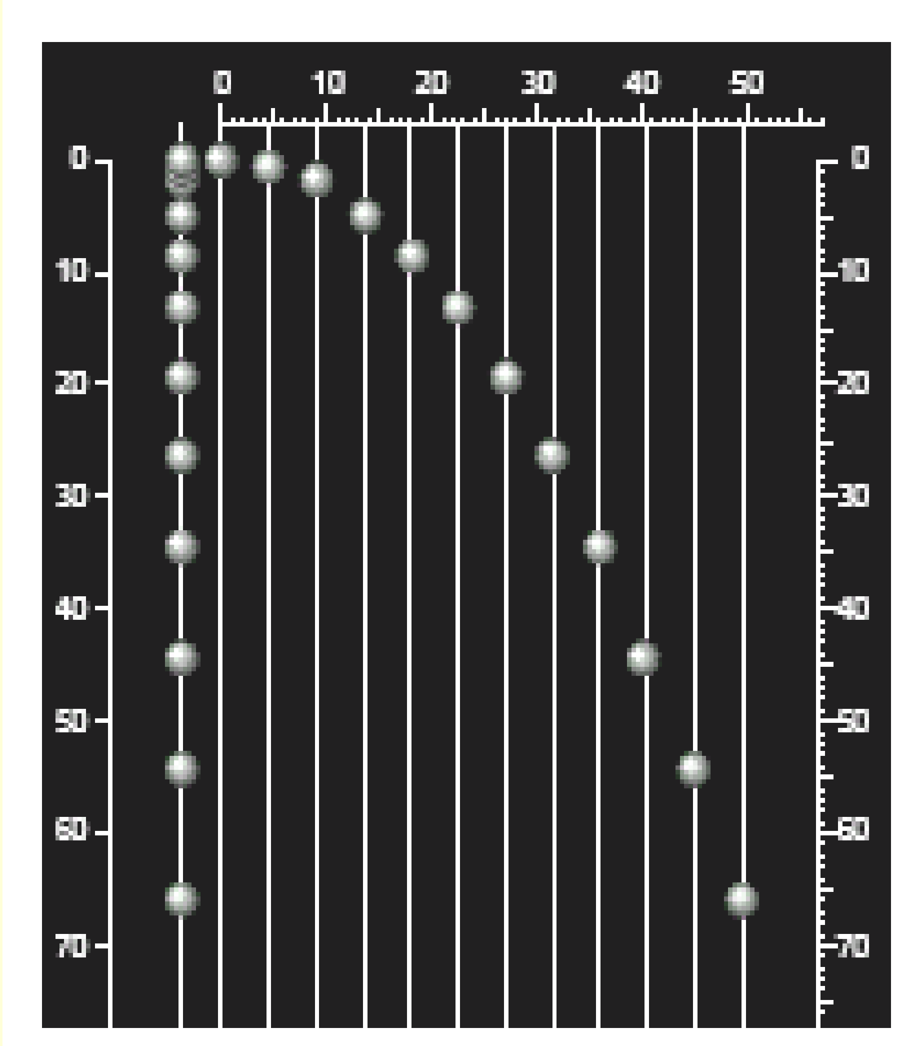
2）鉛直方向：「落体の法則」に従う。

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

3）水平方向：同じ速度(v_0)で運動する。

$$x=v_0t$$

●これだとよく実験を再現



軌跡の形は？

$$y=\frac{1}{2}gt^2,\ x=v_0t$$

の2式から t を消去する。

$t=x/v_0$ を代入すると,

$$y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

ここで,

$$a=\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{v_0}\right)^2$$

とすると,

$$y=ax^2$$

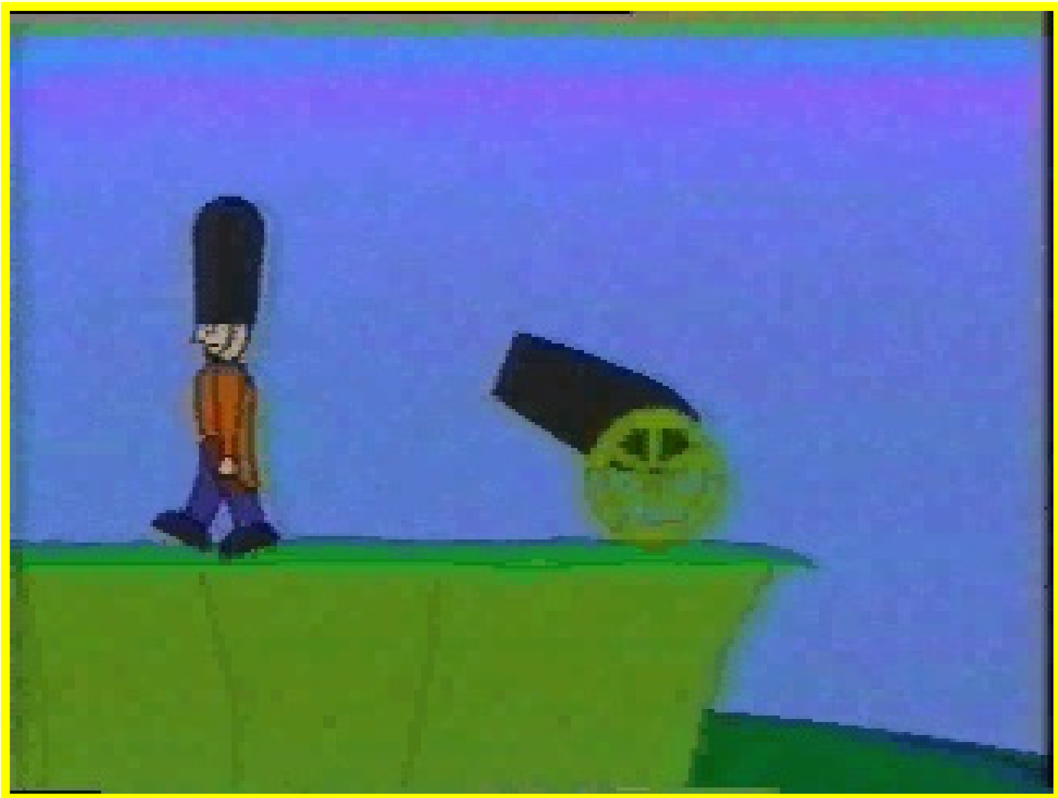
となる。

この関数：放物線

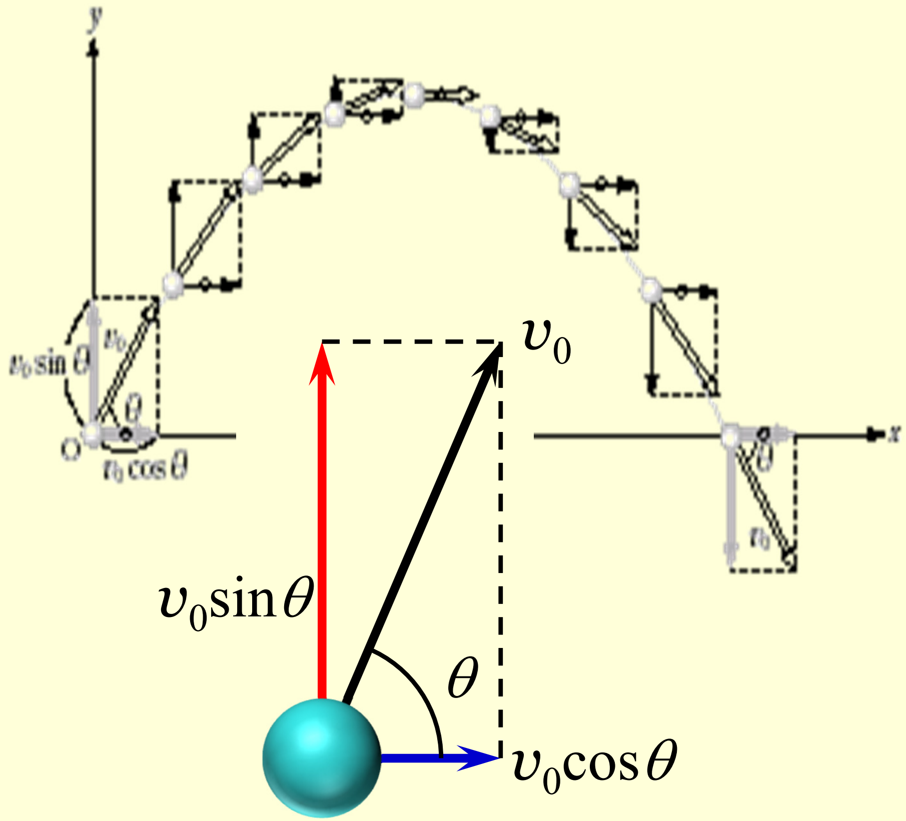
ボールは放物線を描きながら,

落下する。

v_0を大きくすれば，遠くまで届く。



角度θで投げ上げると



水平方向: x 軸
$v_0\cos\theta$ の一定速度で運動する。

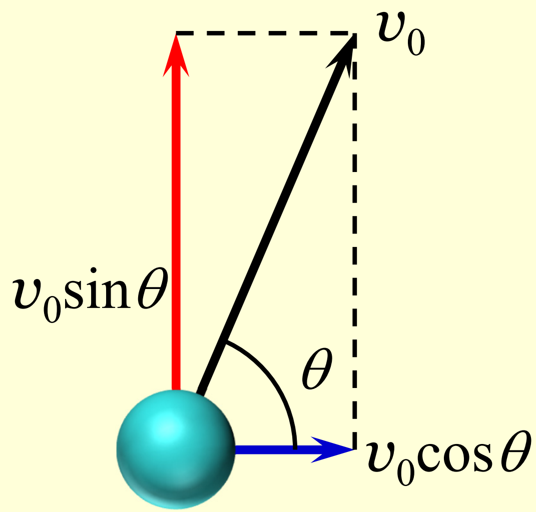
鉛直方向: y 軸
初速度$v_0\sin\theta$ と加速度gで落体の法則に従う。

運動の分解法で考えると？

x軸方向：

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$x = \int v_x \mathrm{d}t = (v_0 \cos\theta) t$$



y軸方向：重力による加速度

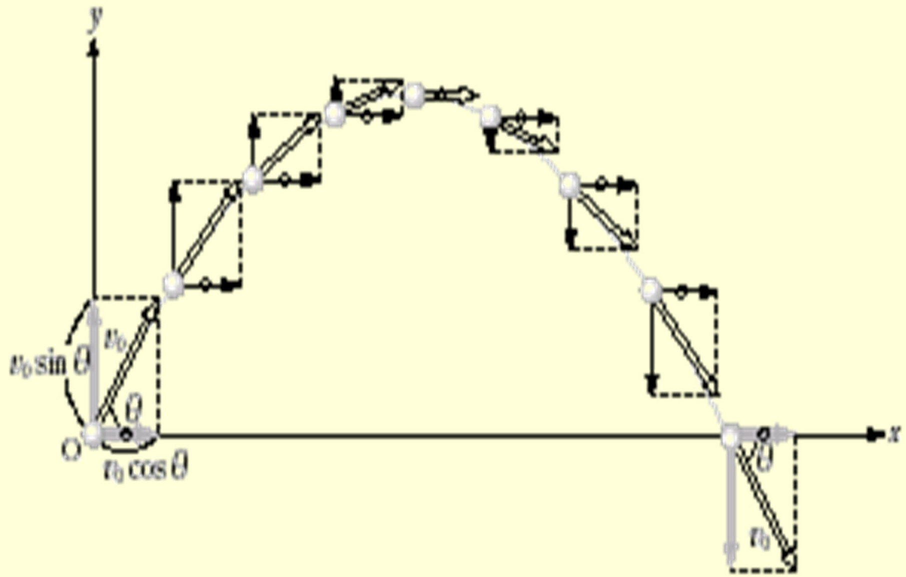
（y軸が上向きなので$-g$）

$$v_y = \int -g \mathrm{d}t$$

$$= -gt + v_0 \sin\theta$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}gt^2} + (v_0 \sin\theta) t$$

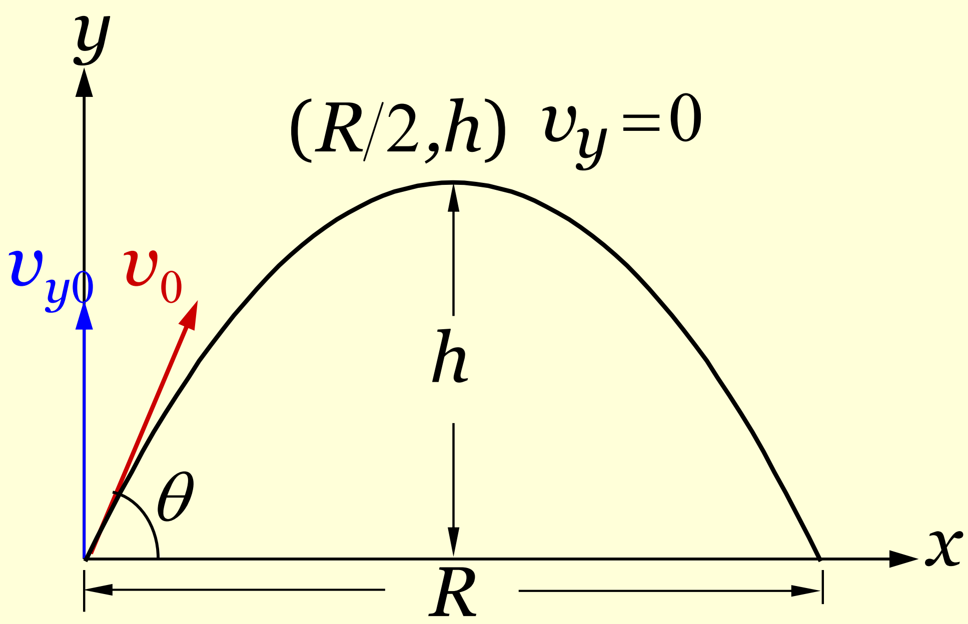


放物運動の距離と時間の関係

角度θで投げ上げた物体が，

1）一番高い所まで上がるのにかかる時間 t_h は？

2）そのときの高さhは？

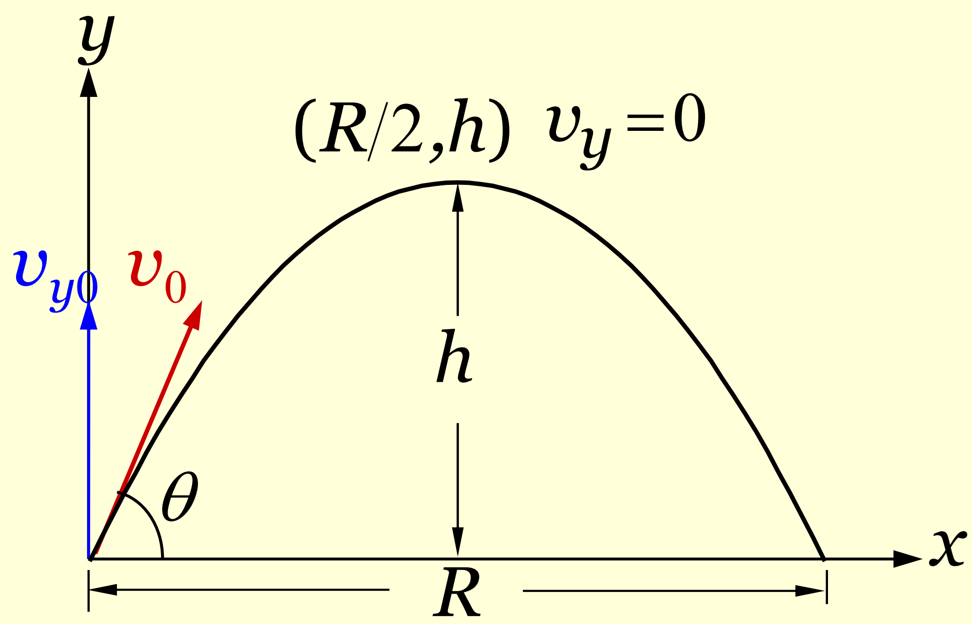


放物運動の距離と時間の関係

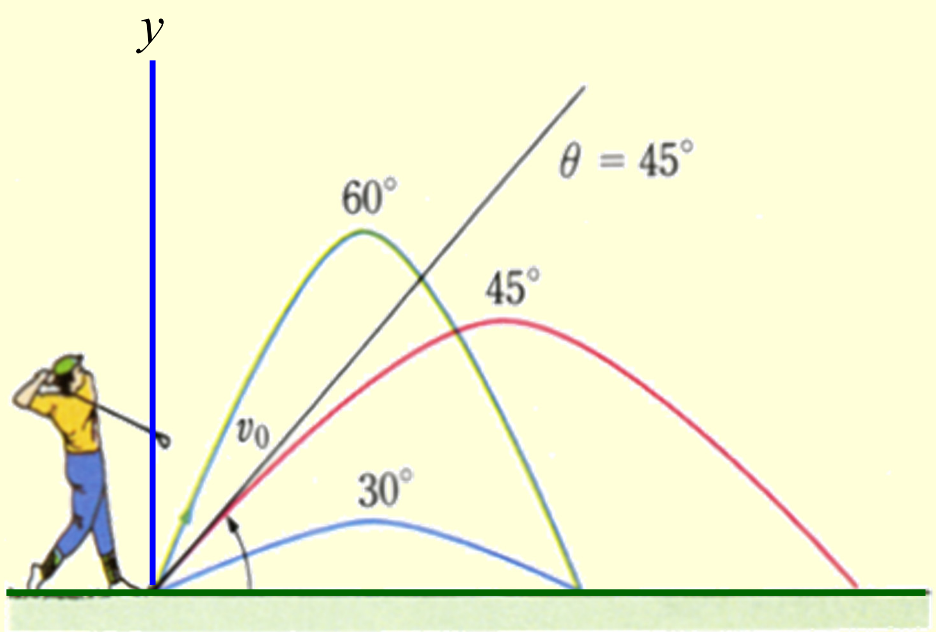
角度θで投げ上げた物体が,

3）投げ上げてから地面に着く
　までにかかる時間tは？

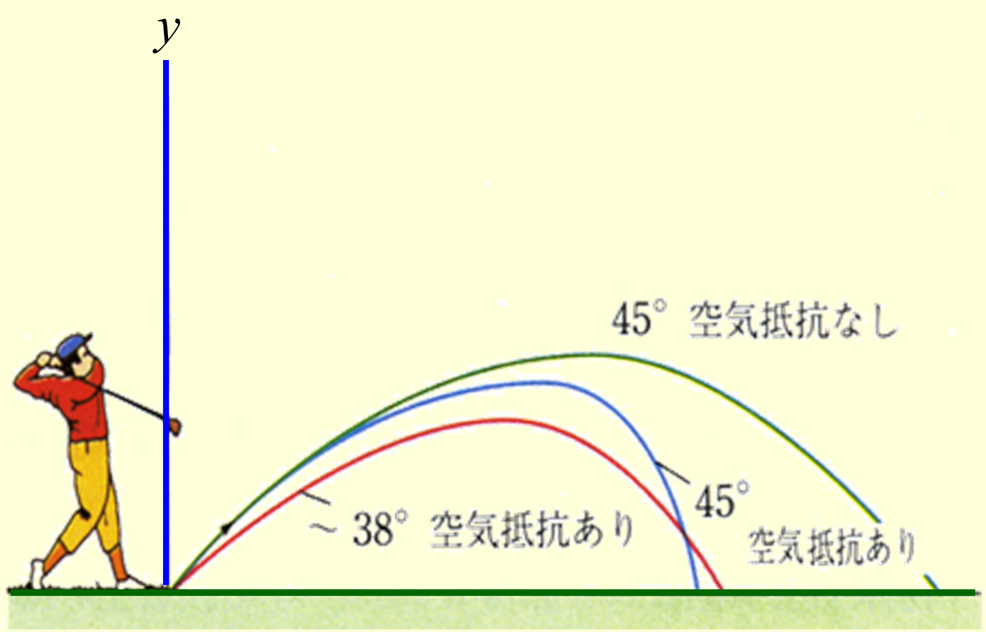
4）そのときの距離Rは？



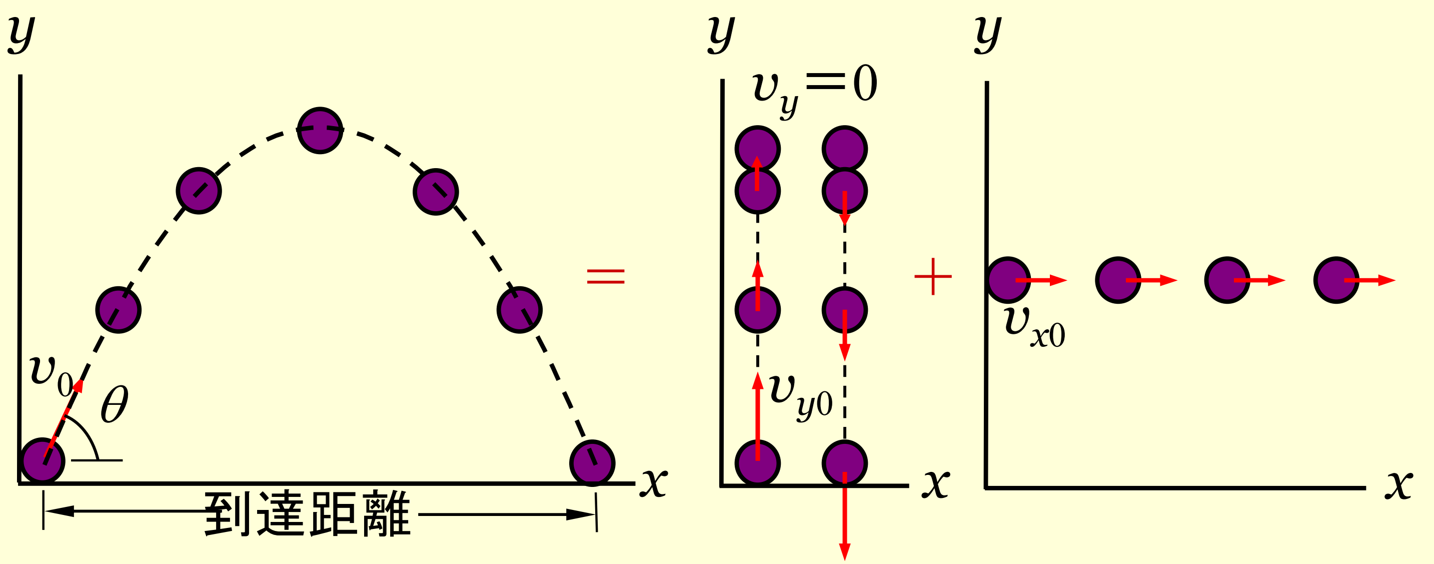
放物運動



y
θ = 45°
60°
45°
30°
v0



y
45° 空気抵抗なし
～38° 空気抵抗あり
45°
空気抵抗あり



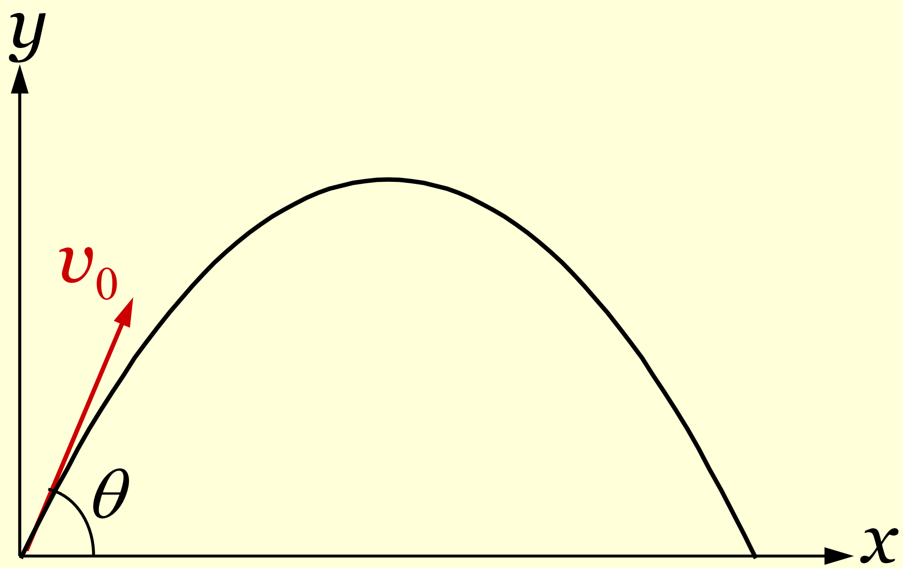
y
x
v0
θ
到達距離
=
vy=0
vy0
+
vx0

斜方投射のまとめ

初速度 $v_0 = (v_0 \cos\theta,\ v_0 \sin\theta)$ で投げられた物体の運動は,

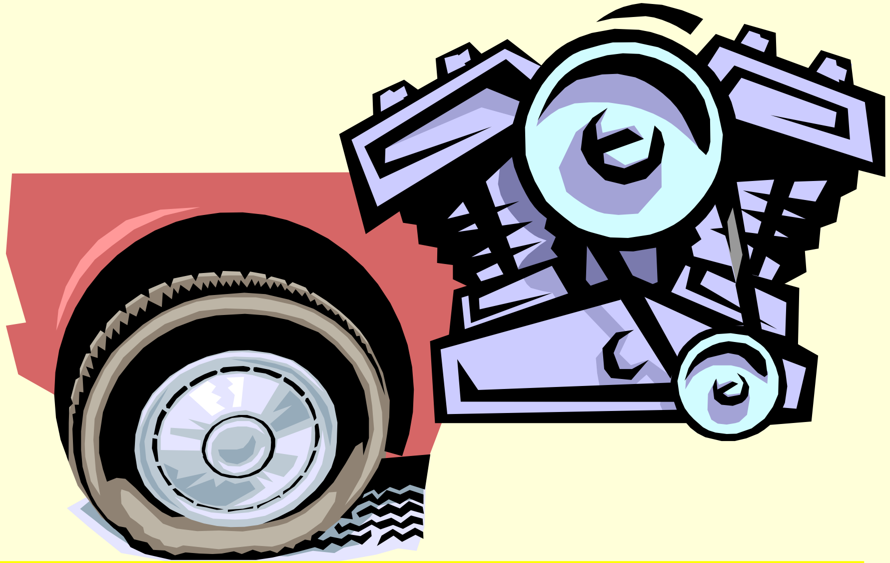
$$v_x = v_0 \cos\theta$$
$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$
$$x = x_0 + v_0 \cos\theta t$$
$$y = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

ポイント:運動をx, yに分解して考える。

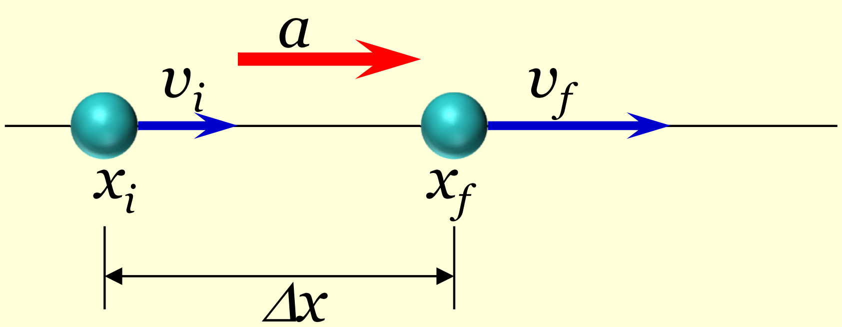


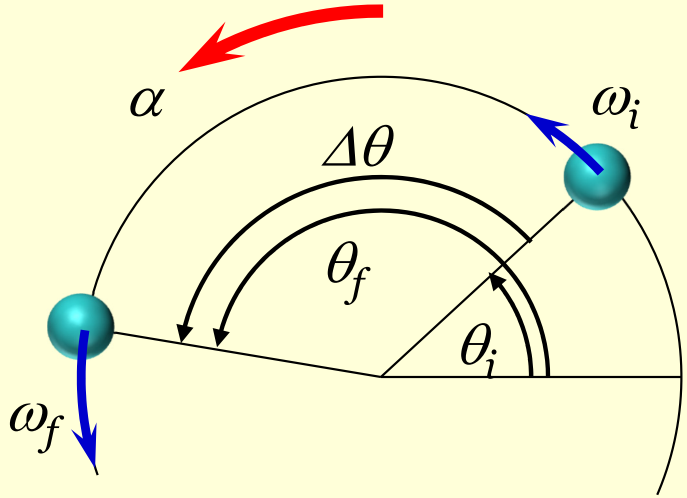
回転運動

身近な円運動



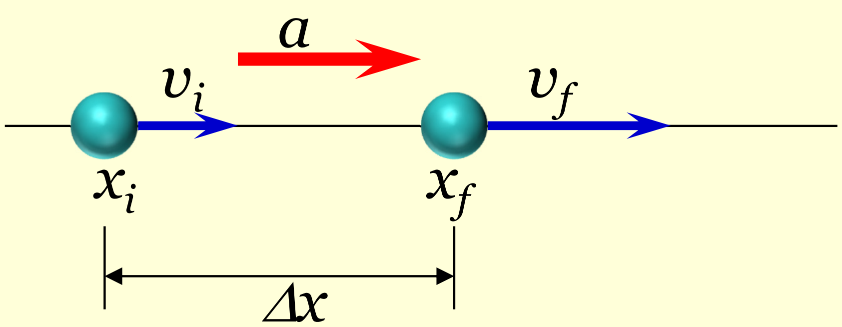
直線運動と円運動

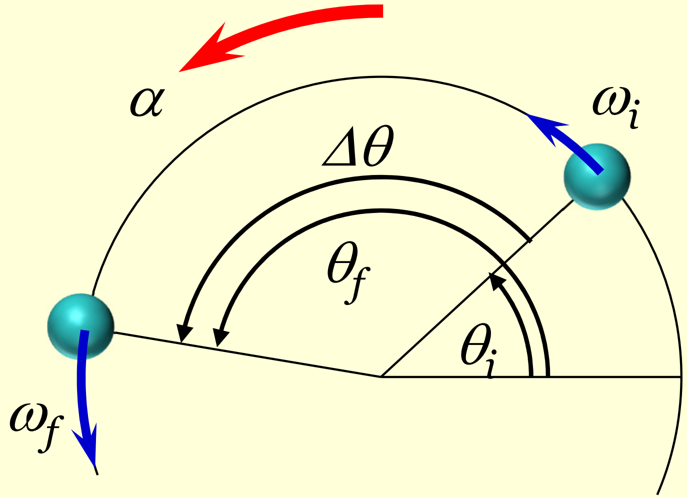




直線上を運動する物体				円周上を運動する物体			
時刻	t_i[s]	→	t_f[s]	時刻	t_i[s]	→	t_f[s]
変位	x_i[m]	→	x_f[m]	角度	θ_i[rad]	→	θ_f[rad]
速度	v_i[m/s]	→	v_f[m/s]	角速度	ω_i[rad/s]	→	ω_f[rad/s]
加速度			a[m/s^2]	角加速度			α[rad/s^2]

角速度と角加速度





直線上を運動する物体の速度vは,

$$\boxed{v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{dx}{dt}}$$

加速度aは,

$$\boxed{a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

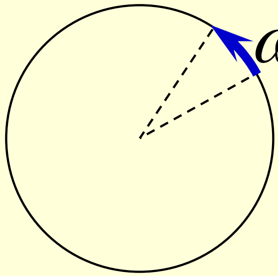
円周上を運動する物体の速度（角速度）ωは,

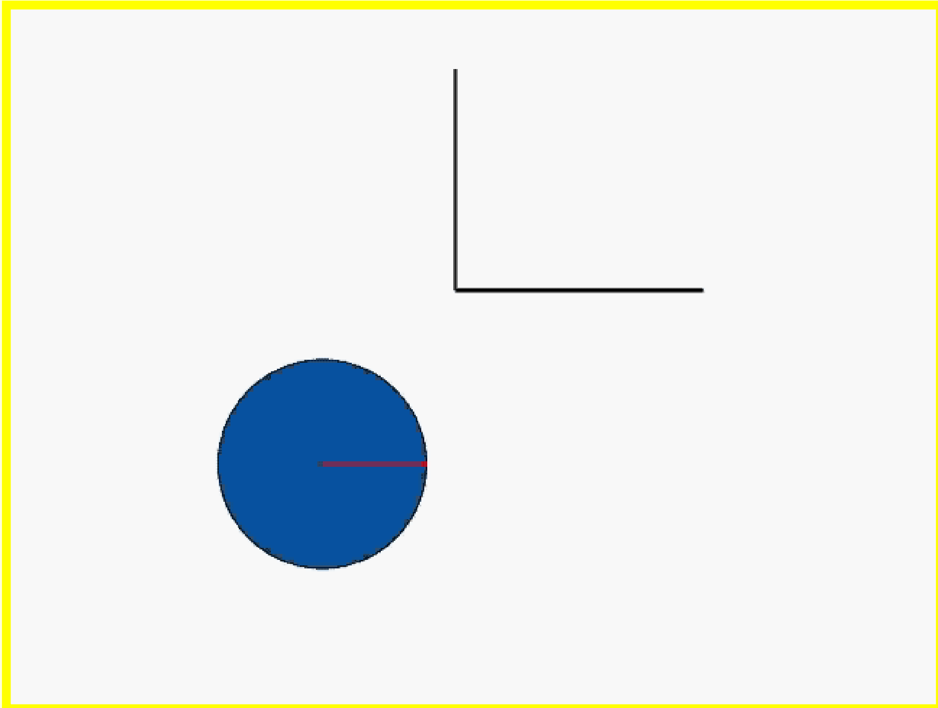
$$\boxed{\omega = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{d\theta}{dt}}$$

加速度（角加速度）αは,

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

等速円運動





角速度ωが一定の運動を等速円運動という。このとき，$\theta = \omega t$ が成り立つ。

１周するのにかかる時間を周期 T [s]と言い，逆に1[s]での回転数を周波数f [Hz (=1/s)] と言う。

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

１周は2πなので，これを用いて角速度ω[rad/s]は，

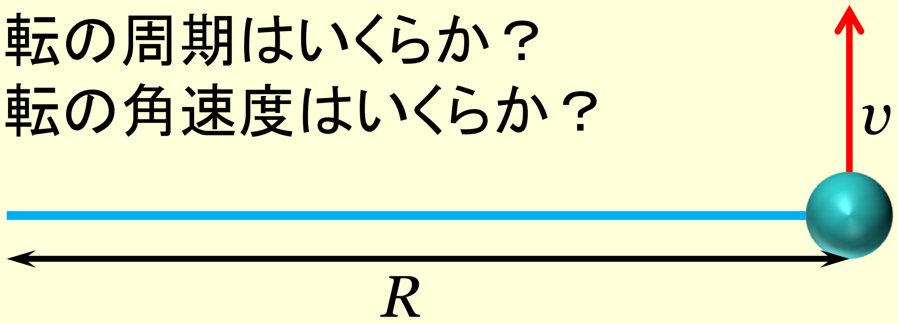
$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

となる。

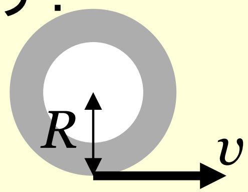
車のエンジン回転数などを表すときは，周波数の代わりに1[min]での回転数[rpm](=round per minite)を用いることが多い。

練習問題

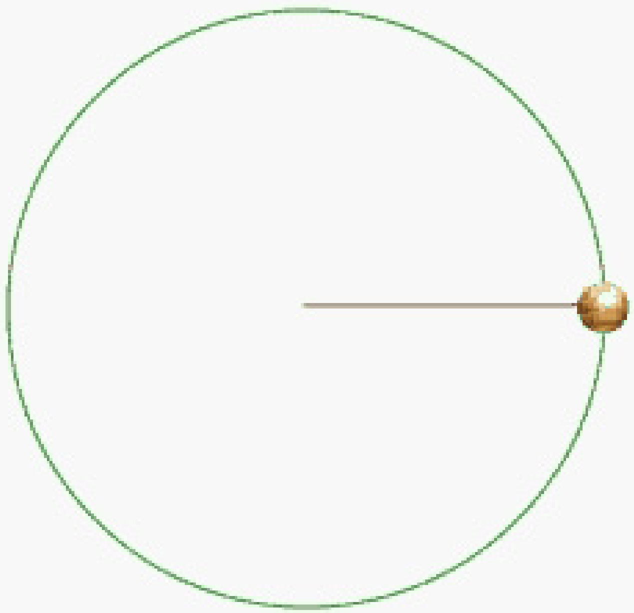
半径Rのひもの先に小球をつけ，速度vで回した。
(1)回転の回転数はいくらか？
(2)回転の周期はいくらか？
(3)回転の角速度はいくらか？



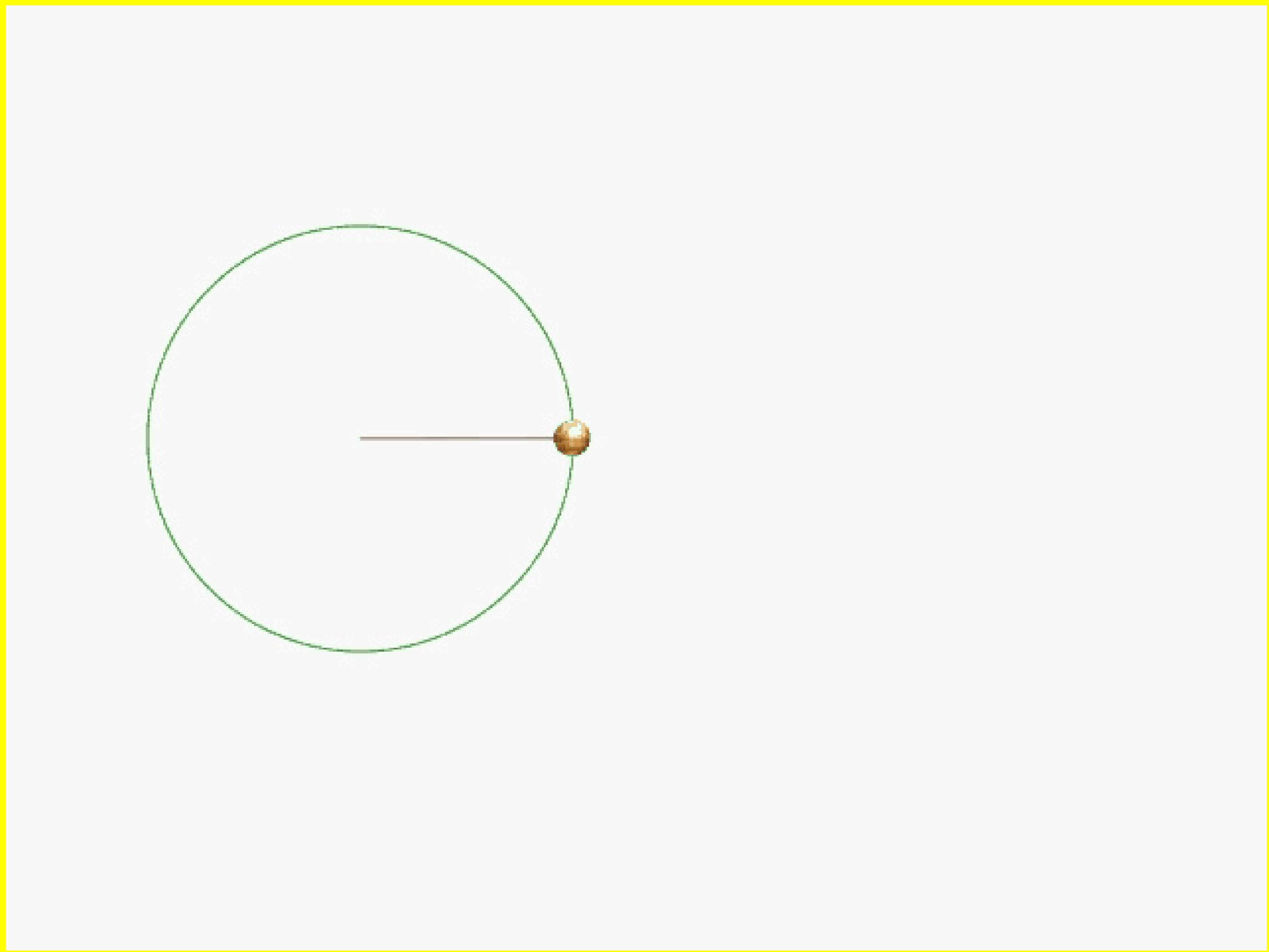
半径Rの円の円周は$2\pi R$。半径Rのタイヤが転がったときを考えてみよう！



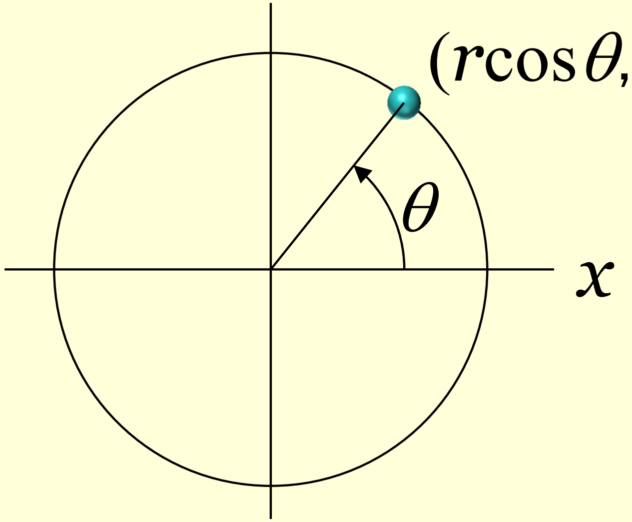
等速円運動の速度・加速度



等速円運動の速度・加速度



円運動の数学的解法



$\theta = \omega t$ とすると，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = r\cos\omega t \\ y = r\sin\theta = r\sin\omega t \end{cases}$$

x，y方向の速度，加速度は，

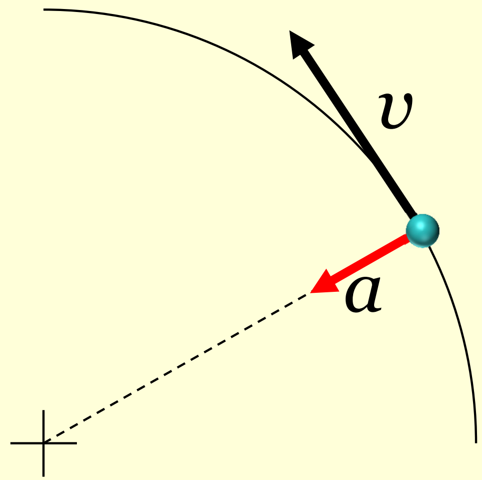
$$\begin{cases} v_x = \dfrac{d(r\cos\omega t)}{dt} = -r\omega\sin\omega t \\ v_y = \dfrac{d(r\sin\omega t)}{dt} = r\omega\cos\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d(-r\omega\sin\omega t)}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t \\ a_y = \dfrac{d(r\omega\cos\omega t)}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

よって，

$$v = \sqrt{v_x^2 + x_y^2} = r\omega$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$$



円運動のまとめ

変位　x [m]

$\downarrow v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$　　$\uparrow x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$

速度　v [m/s]

$\downarrow a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　$\uparrow v=v_0+at$

加速度　a [m/s²]

$\times\dfrac{1}{r}$ →

← $\times r$

角度　θ [rad]

$\downarrow \omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$　　$\uparrow \theta=\theta_0+\omega_0t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$

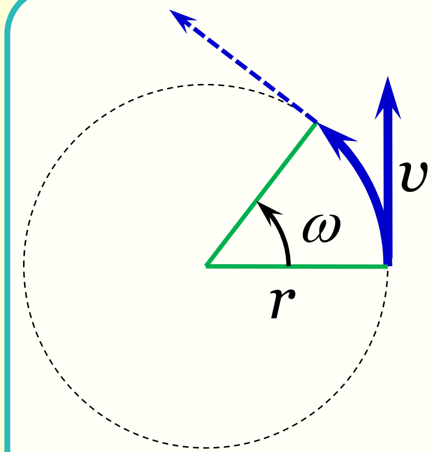
角速度　ω [rad/s]

$\downarrow \alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$　　$\uparrow \omega=\omega_0+\alpha t$

角加速度　α [rad/s²]

$\boxed{x = r\theta,\ v = r\omega,\ a = r\alpha}$

↑ $v=r\omega$

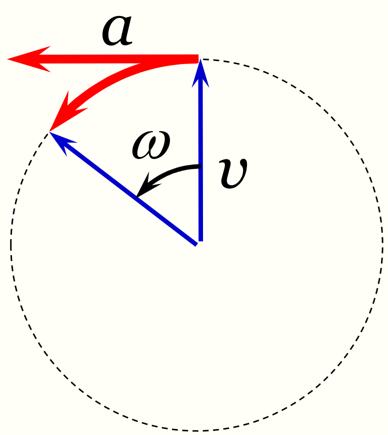


１周するのにかかる時間をTとすると,

$$2\pi r=vT=v\frac{2\pi}{\omega}$$

なので,

$\boxed{v=r\omega}$



１周するのにかかる時間をTとすると,

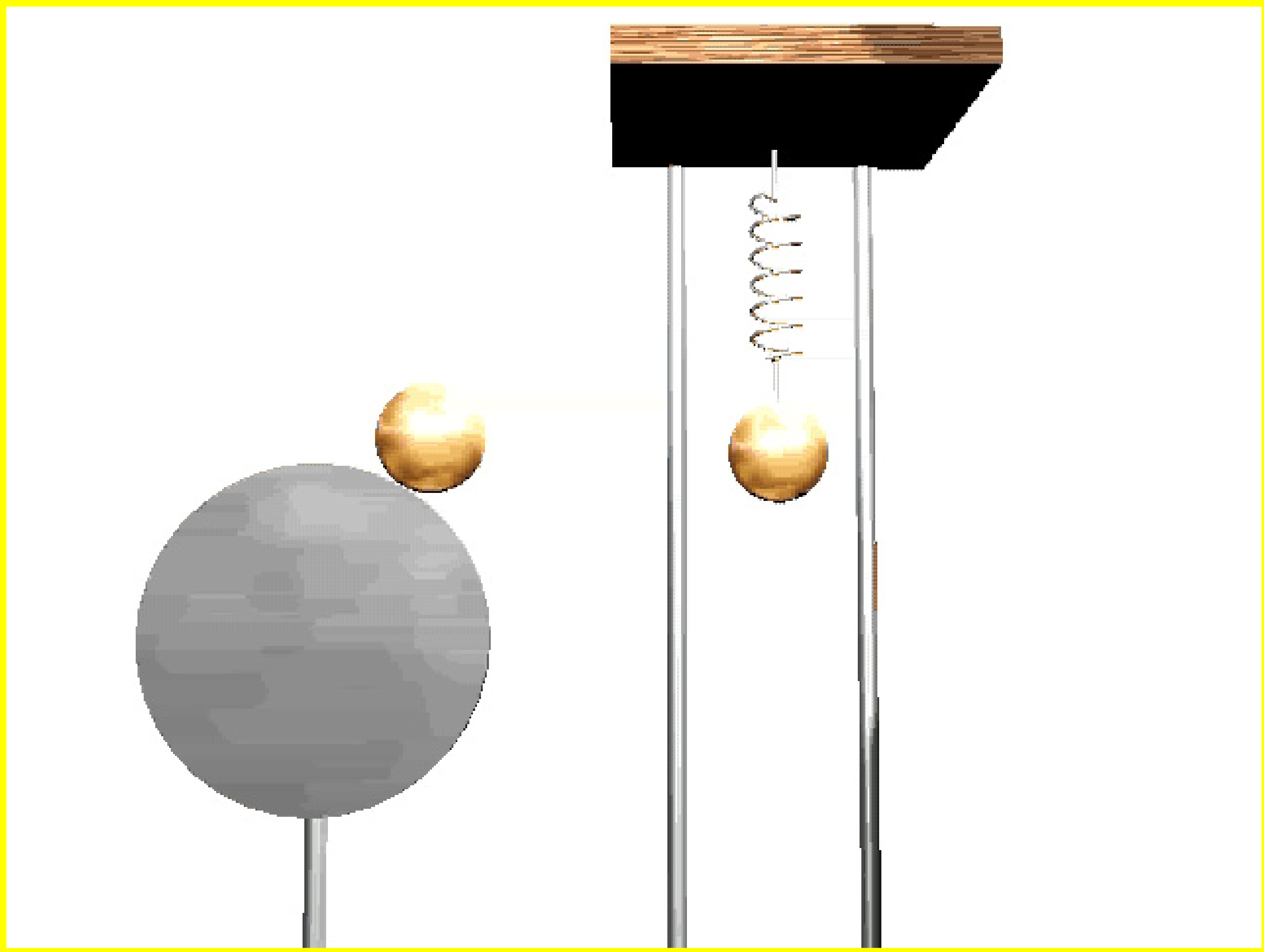
$$2\pi v=aT=a\frac{2\pi}{\omega}$$

なので,

$\boxed{a=v\omega=r\omega^2}$

振動
（詳しくは，第11章）

単振動と回転



単振動も回転運動も横から見ると同じ周期的な運動。

単振動の周期 T, 角速度 ω とすると,

$$\omega T = 2\pi$$

なので,

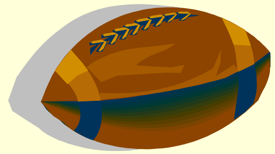
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

また, 振動数(周波数) f は,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

ベクトル・相対速度



2–2～2–7は，余裕がある人は学習しておいてください。