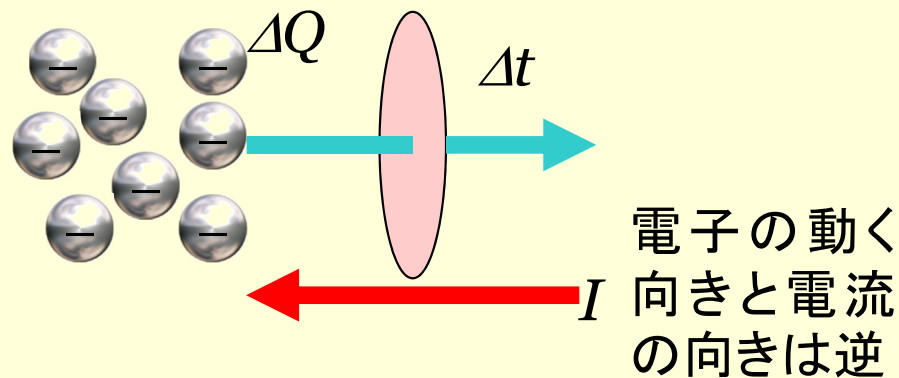


第2章 電流と抵抗



電流

導体に電源をつなぐと、導体内に電界が生じて自由電子が移動する。この電荷の流れを電流という。電流の強さ I は、流れに垂直な断面を単位時間あたりに通過する電荷の量で表す。



微少な時間 Δt の間に通過した電荷を ΔQ とすると、電流 I は、

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

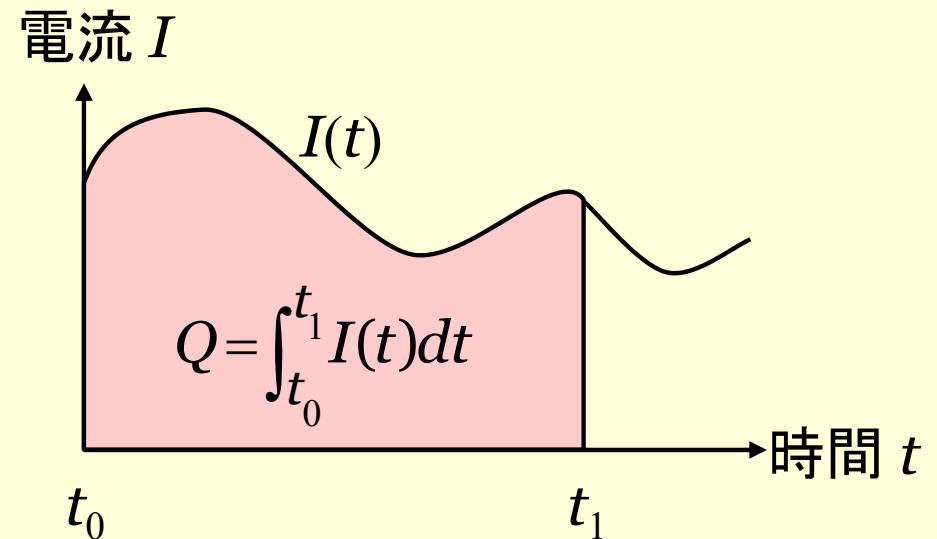
となる。

電流の単位は[A (アンペア)]であり、定義より、

$$1[\text{A}] = 1[\text{C/s}]$$

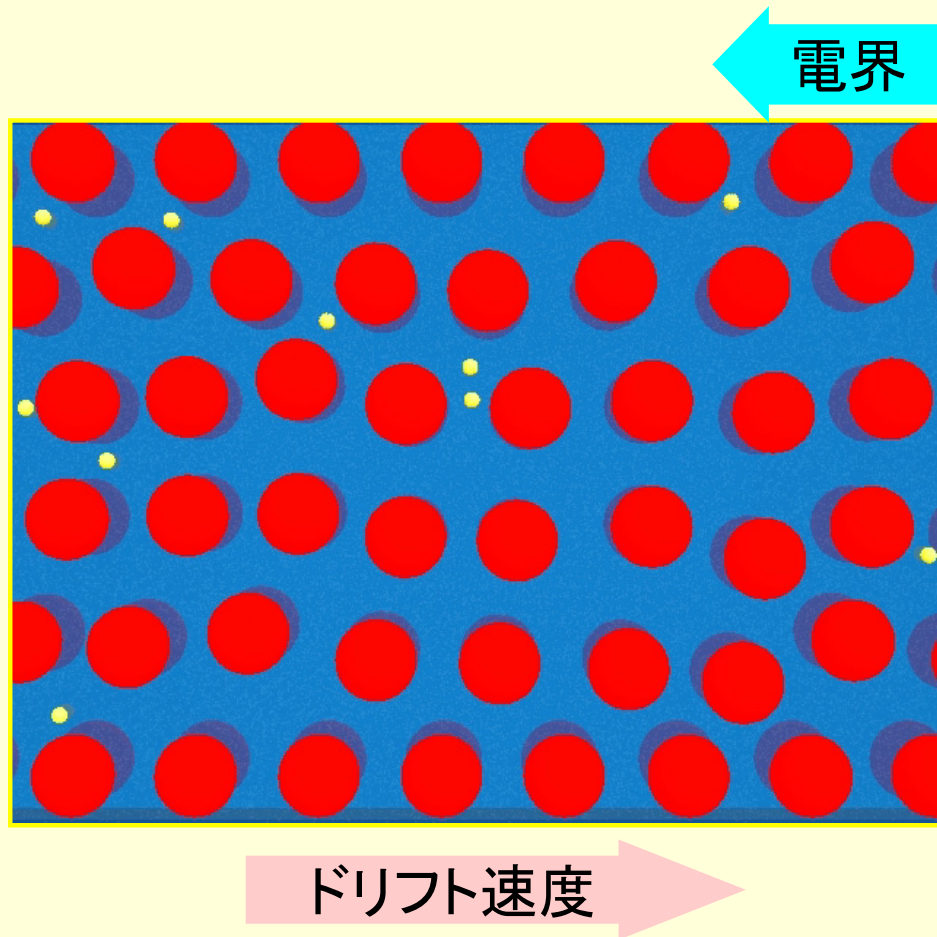
となる。

逆に、ある時間 t に移動する電荷 Q は、電流を積分することで得られる。

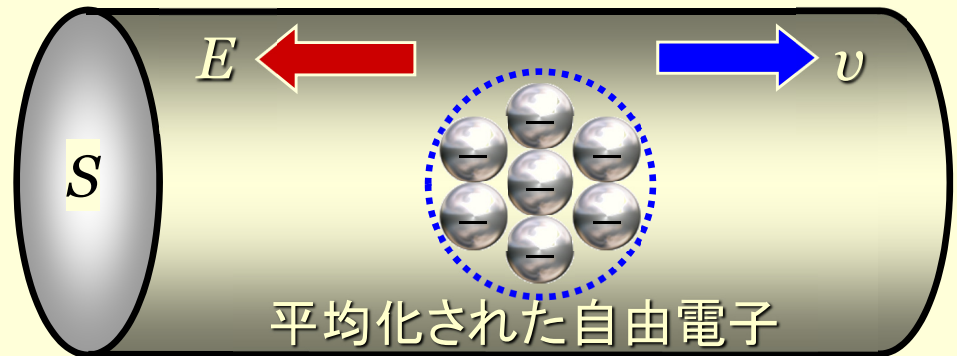


特に、時間によって向きや大きさが変わらない電流を定常電流と言う。

導体中での自由電子のふるまい



導体内に電界があると、自由電子は導体内の陽イオンにランダムに当たりながらも、電界と逆の方向に移動する。この時の平均速度を**ドリフト速度**と言う。



断面積 $S[\text{m}^2]$ の導線の中を、**ドリフト速度** $v[\text{m/s}]$ の自由電子が移動するとき、体積 $vS[\text{m}^3]$ の中の自由電子が1秒間に S の断面を通過したことになる。**単位面積あたりの自由電子数を** n とすると、移動した総電子数は $nvS[\text{個}]$ となり、**自由電子1個の電荷を** $-e[\text{C}]$ とすると、1秒間にある断面を通過する電荷は $-envS[\text{C}]$ となり、これより**電流** I は、次式となる。

$$I = envS$$

自由電子のドリフト速度

導体の両端に電圧 $V[\text{V}]$ を加えると、導体の内部に電界 E

$$E = \frac{V}{\ell} [\text{V/m}]$$

が発生する。

導体中の自由電子は、この電界と反対方向の力 F

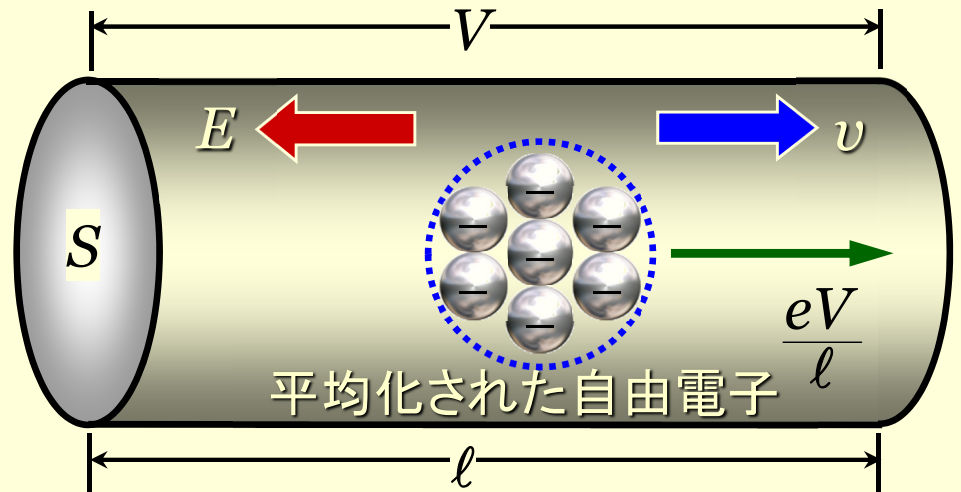
$$F = ma = \frac{eV}{\ell} [\text{N}]$$

を受け、

$$a = \frac{eV}{m\ell} [\text{m/s}^2]$$

の加速度が生じる。このため、ドリフト速度 $v[\text{m/s}]$ は、

$$v = \frac{eV}{m\ell} t [\text{m/s}]$$



となる。陽イオンに衝突して止まるまでの時間を $\tau[\text{s}]$ とすると、衝突直前の速度は、

$$v = \frac{eV}{m\ell} \tau [\text{m/s}]$$

となり、平均であるドリフト速度 v は、

$$v = \frac{e\tau}{2m\ell} V [\text{m/s}]$$

導体の電気抵抗

導体中の自由電子のドリフト速度 v [m/s] は、

$$v = \frac{e\tau}{2m\ell} V \text{ [m/s]}$$

となり、これを先の電流の式

$$I = envS \text{ [A]}$$

に代入すると、導体中を流れる電流 I [A] は、

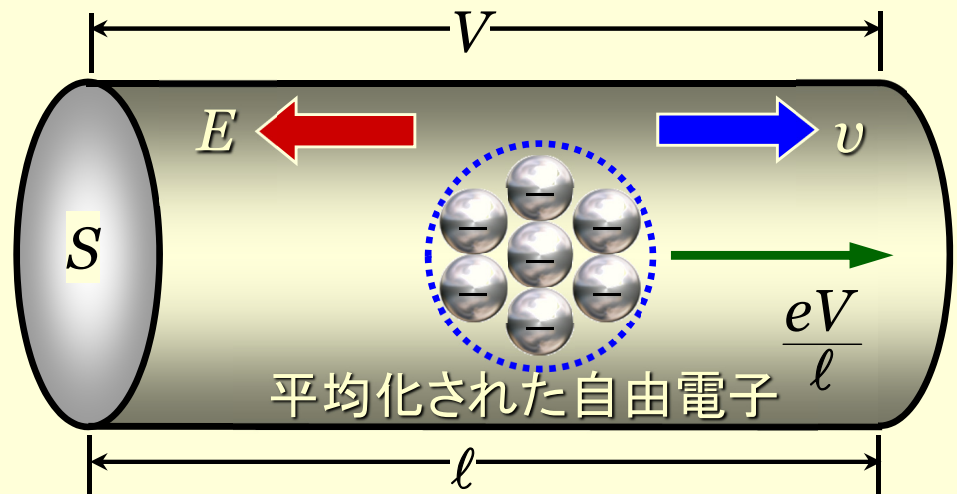
$$I = enS \cdot \left(\frac{e\tau}{2m\ell} V \right) = \left(\frac{e^2 n S \tau}{2m\ell} \right) \cdot V$$

となる。ここで、

$$\rho = \frac{2m}{e^2 n \tau}$$

とすると、導体中の抵抗 R は、

$$R = \frac{V}{I}$$



から、

$$R = \frac{V}{I} = \left(\frac{2m}{e^2 n \tau} \right) \cdot \frac{\ell}{S} = \rho \cdot \frac{\ell}{S}$$

となる。 ρ は導体の種類や温度で決まり、導体の長さおよび断面積あたりの抵抗を表す。これを**電気抵抗率**という。

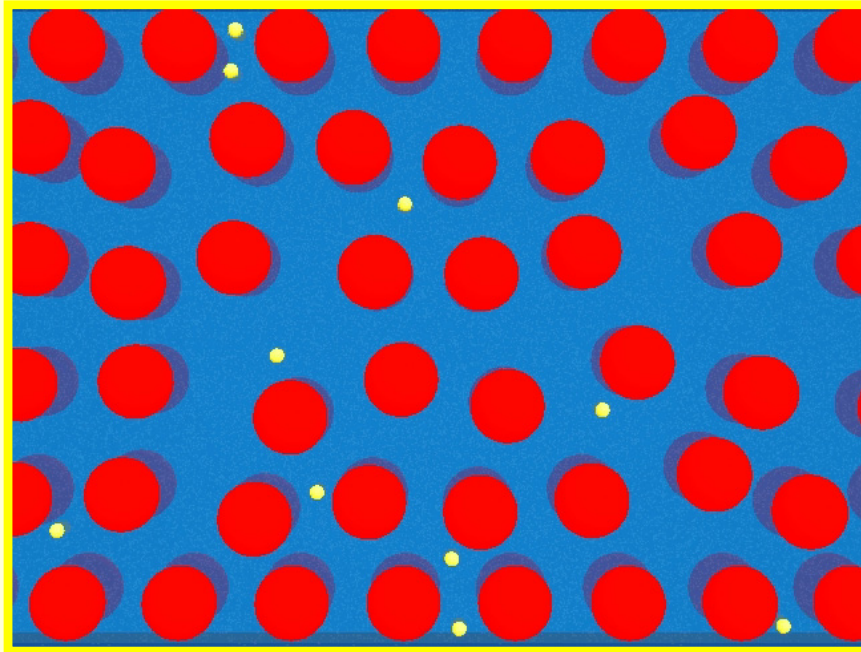
$$\rho [\Omega \text{m}] = \frac{R [\Omega] \cdot S [\text{m}^2]}{\ell [\text{m}]}$$

各物質の電気抵抗率

表示温度のない物質の温度は20℃

物 質	抵抗率[Ωm]	物 質	抵抗率[Ωm]
酸化物高温超伝導体 (YBa ₂ Cu ₃ O ₇)	0.5～5×10 ⁻⁴	炭素	3.50×10 ⁻⁵
		ゲルマニウム(Ge)	4.60×10 ⁻¹
銀	1.59×10 ⁻⁸	ケイ素(Si)	6.40×10 ²
銅	1.68×10 ⁻⁸	水(純水)	2.5×10 ⁵
アルミニウム	2.82×10 ⁻⁸	ポリ塩化ビニール	10 ⁹ ～10 ¹²
ナトリウム(0℃)	4.74×10 ⁻⁸	天然ゴム	10 ¹² ～10 ¹⁵
ニッケル	6.99×10 ⁻⁸	パラフィン	10 ¹⁴ ～10 ¹⁷
タングステン	5.60×10 ⁻⁸	ガラス	10 ¹⁰ ～10 ¹⁴
鉄	1.00×10 ⁻⁷	ポリエチレン	10 ¹⁵ ～10 ¹⁷
ニクロム(Ni, Fe, Cr)	1.50×10 ⁻⁶		

抵抗の温度依存性



金属の温度が上昇すると、原子の振動が激しくなり、衝突するまでの時間 τ が短くなり、電子の平均速度が小さくなる。抵抗率でみると、抵抗率は温度 $T[^\circ\text{C}]$ の関数となり、

$$\rho = \rho_0 \{1 + \alpha(T - 20)\}$$

となる。ここで、 ρ_0 は温度が $20[^\circ\text{C}]$ の時の抵抗率、 α は抵抗温度係数という。

物質	抵抗温度係数 $[/math>^\circ\text{C}]$
銀	3.8×10^{-3}
銅	3.9×10^{-3}
金	3.4×10^{-3}
アルミニウム	3.9×10^{-3}
タングステン	4.5×10^{-3}
鉄	5.0×10^{-3}
ニクロム	0.4×10^{-3}
炭素	-0.5×10^{-3}
ゲルマニウム	-4.8×10^{-2}
シリコン	-7.5×10^{-2}
サーミスター	-4.4×10^{-2}

半導体はもともと電流が流れにくい
ため、温度上昇により陽イオンの振
動が激しくなり、自由電子の数が増
えることがある。そのため、逆に抵
抗が減少する。

電氣的エネルギーと電力

微小時間 dt において電気が行う仕事 dW は電氣のエネルギー qEd を用いて、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d(qEd)}{dt}$$

で表される。一般に dW/dt の代わりに、単位時間当たりの電氣エネルギーの消費量 P [$J/s = W$] を用い、これを電力という。ここに、

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$V = Ed$$

を代入すると、

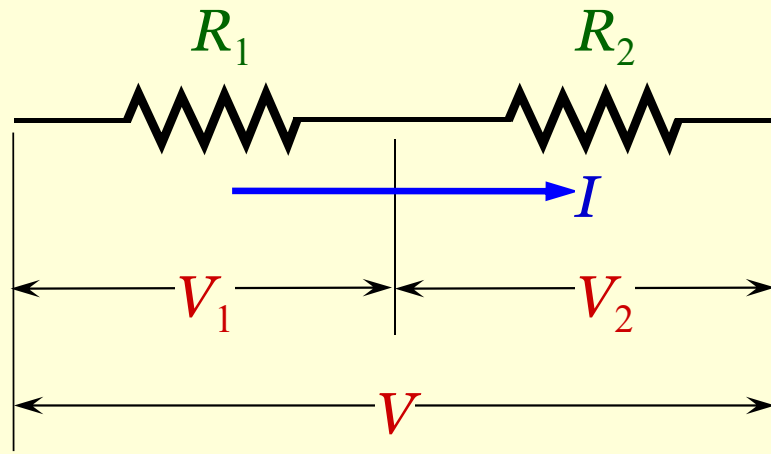
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot Ed = IV$$

となる。

電氣回路で消費される電力は抵抗などで熱に変換される。この変換された熱をジュール熱という。



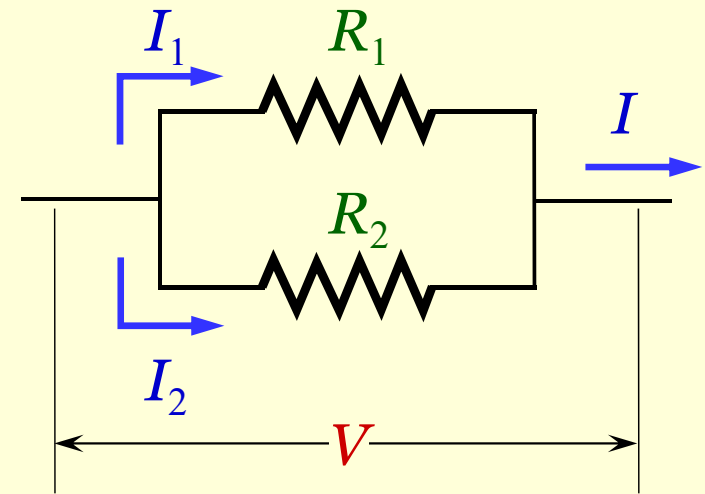
抵抗の直列・並列接続



$$\begin{aligned}V_1 &= R_1 I, \quad V_2 = R_2 I \\V &= V_1 + V_2 \\&= R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I\end{aligned}$$

合成抵抗 R は、

$$R = R_1 + R_2$$



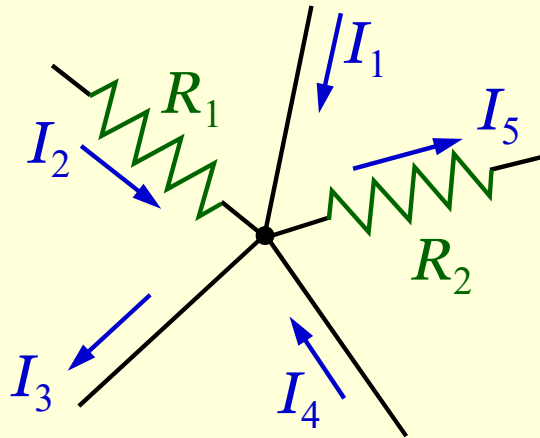
$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2} \\I &= I_1 + I_2 \\&= \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V\end{aligned}$$

合成抵抗 R は、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

キルヒホッフの法則

第1法則 回路中の分岐点

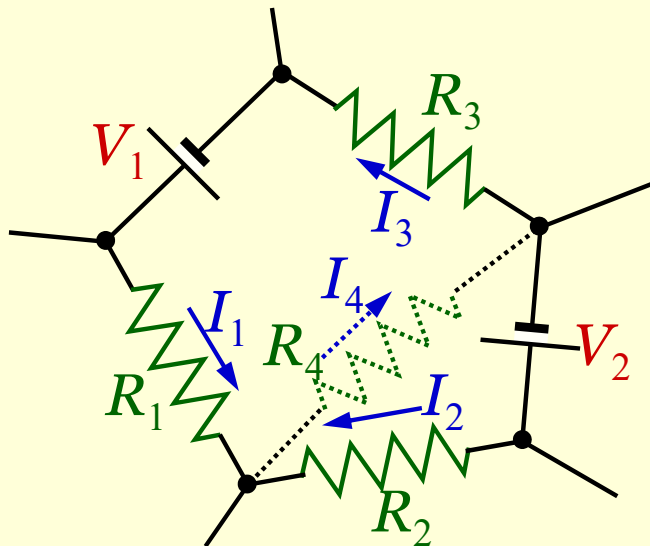


3つ以上の導線の交点を分岐点、分岐点から隣に分岐点までの間を分岐路という。
1つの分岐点に出入りする電流の代数和は0である。

$$I_1 + I_2 + (-I_3) + I_4 + (-I_5) = 0$$

$$\sum I_i = 0$$

第2法則 回路中の網目



分岐路が集まってできる輪になった回路を網目という。**網目の中の各分岐路の抵抗と電流の積 ($R_i I_i$) の代数和は、網目の中にある起電力の代数和と等しい。**

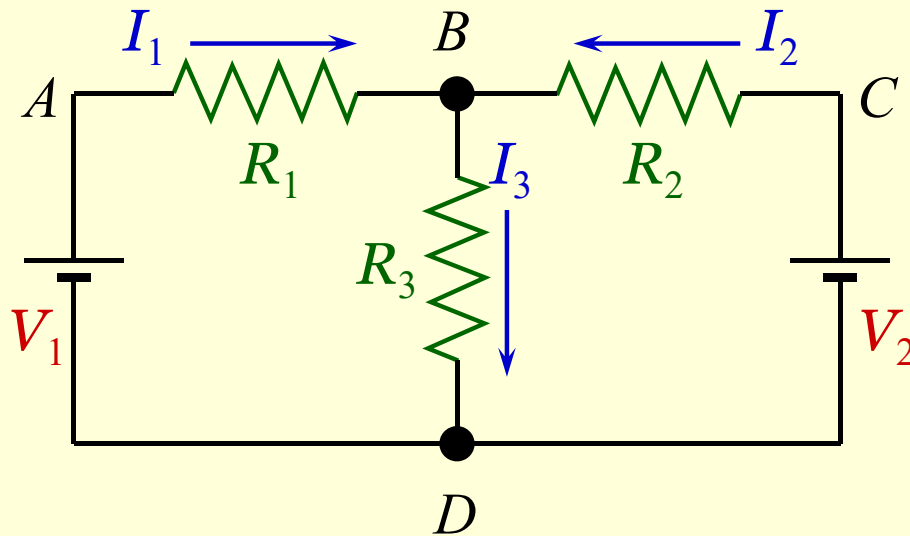
$$R_1 I_1 + (-R_2 I_2) + R_3 I_3 = V_1 + (-V_2)$$

$$\sum R_i I_i = \sum V_i$$

V_2 、 R_2 、 R_4 の回路では、

$$R_2 I_2 + R_4 I_4 = V_2$$

キルヒホッフの法則の必要な例



回路に流れる電流を図のように定義する。未知数が3個なので、3つの連立方程式を立てればよい。

点Bに第1法則を適用すると、

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

また、ABCD、ABD、BCDの3つの閉回路があるが、ここではABDとABCDの2つを取りあげる。閉回路ABDに第2法則を適用すると、

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = V_1 \quad (2)$$

閉回路ABCDでは、

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = V_1 - V_2 \quad (3)$$

これら3本の連立方程式を解くことで電流 $I_1 \sim I_3$ を求めることができる。

式(1)～(3)をまとめると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}$$

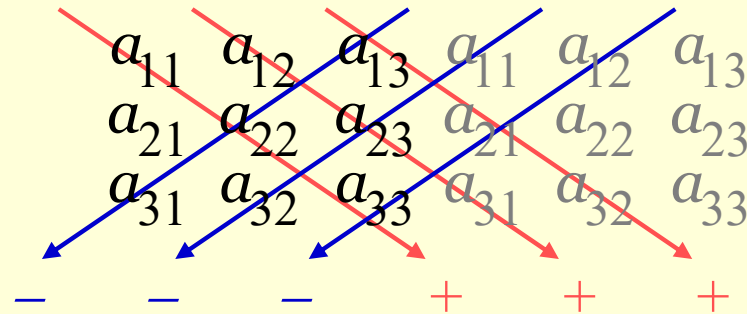
よって、電流 $I_1 \sim I_3$ は、

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

3 × 3行列の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

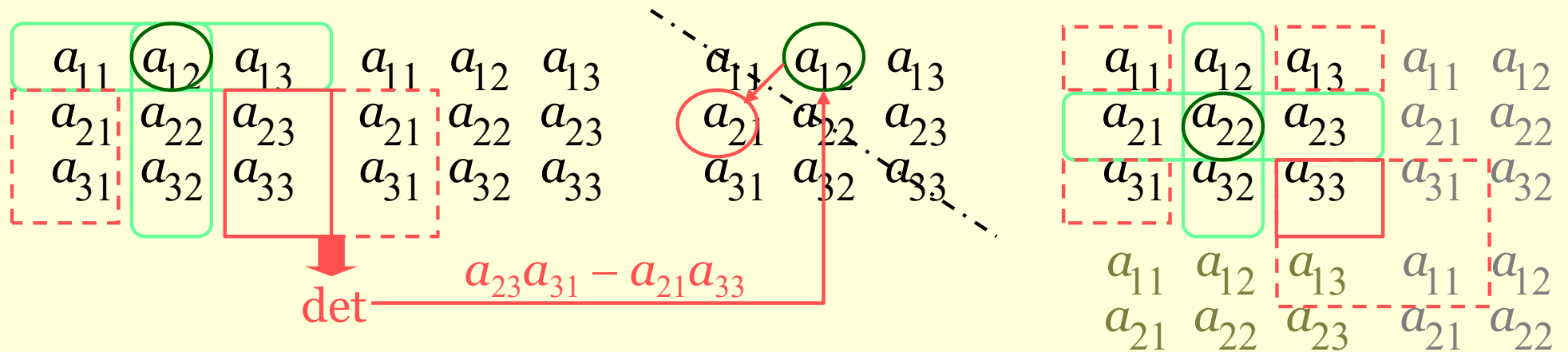


について、

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \neq 0$$

のとき、逆行列が存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$



キルヒホッフの法則の必要な例

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{pmatrix} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$

なので、逆行列が存在し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \begin{pmatrix} R_2 R_3 & R_2 & R_3 \\ R_1 R_3 & R_1 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 R_2 & R_1 + R_2 & -R_1 \end{pmatrix}$$

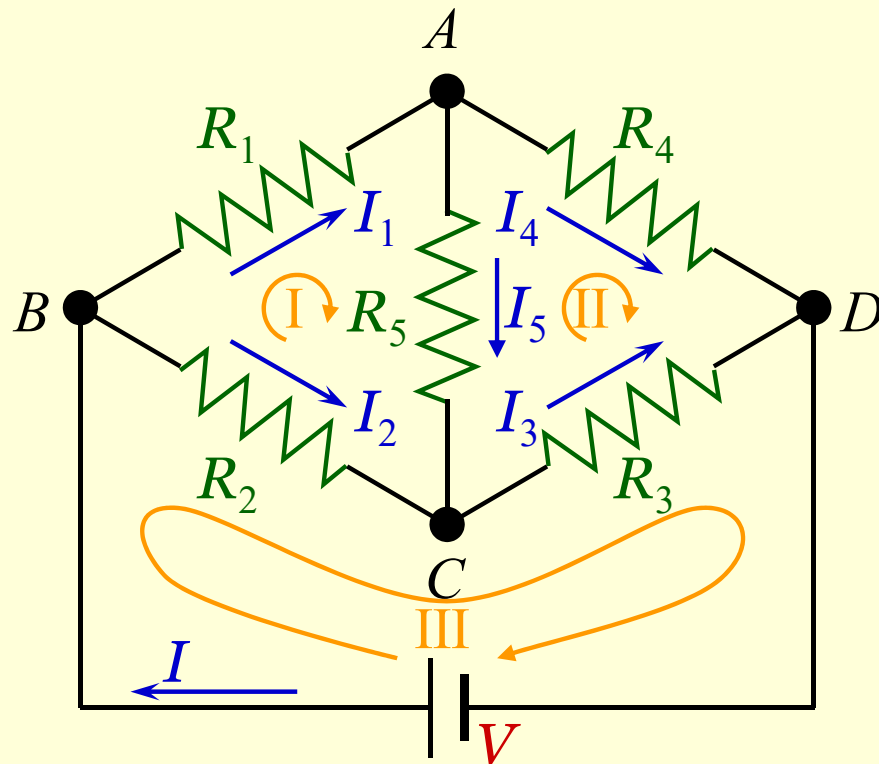
よって、

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \begin{pmatrix} R_2 R_3 & R_2 & R_3 \\ R_1 R_3 & R_1 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 R_2 & R_1 + R_2 & -R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}$$

より、

$$I_1 = \frac{R_2 V_1 + R_3 (V_1 - V_2)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad I_2 = \frac{R_1 V_2 - R_3 (V_1 - V_2)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad I_3 = \frac{R_1 V_2 + R_2 V_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

ホイートストンブリッジ回路



(1) 分岐電流による解法

m 個の分岐路と n 個の分岐点を持つ回路で全ての分岐電流が未知の場合は、 $(n - 1)$ 個の分岐点と $N = m - (n - 1)$ 個の独立な網目を適当に選び、合計 m 個の $\sum I_i = 0$ と $\sum R_i I_i = \sum V_i$ を作れば、未知電流を求めるこ

とができる。

独立な $4 - 1 = 3$ 個の分岐点として、

$$\text{A} \quad I_1 - I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{B} \quad I - I_1 - I_2 = 0$$

$$\text{C} \quad I_2 - I_3 + I_5 = 0$$

独立な $6 - (4 - 1) = 3$ 個の網目として、

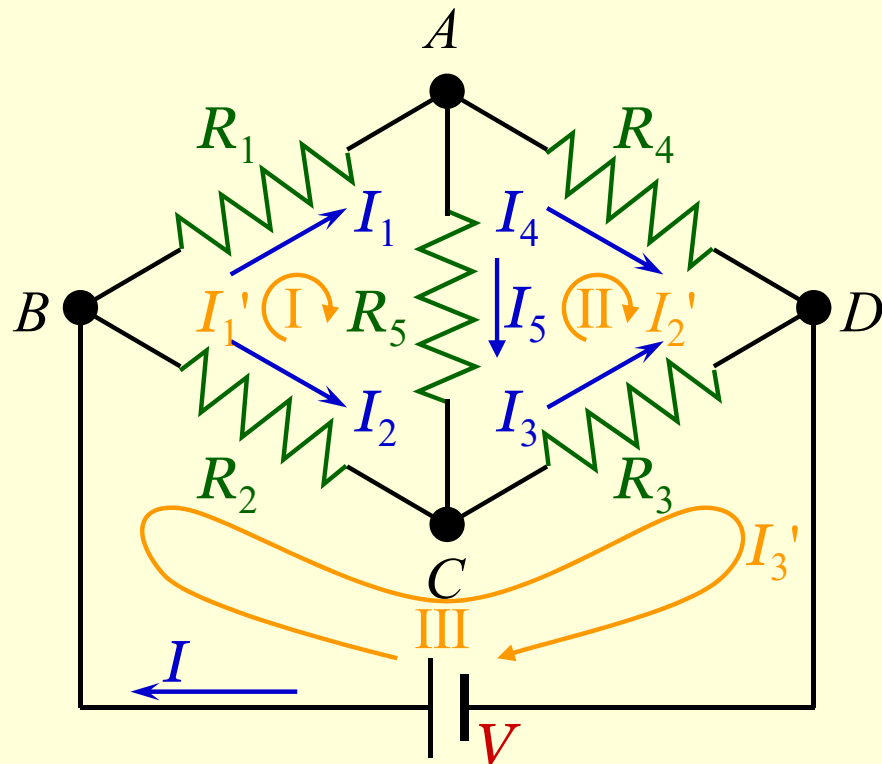
$$\text{I} \quad R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0$$

$$\text{II} \quad -R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0$$

$$\text{III} \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 = V$$

これら6つの連立方程式を解けば、 $I_1 \sim I_5$ 、 I を得ることができる。

ホイートストンブリッジ回路



(2) 網目電流による解法

m 個の分岐路と n 個の分岐点を持つ回路で $N = m - (n - 1)$ 個の独立な網目電流を考える。I、II、IIIに流れる網目電流をそれぞれ、 I_1' 、 I_2' 、 I_3' とすると、

$$I_1 = I_1' \quad I_2 = -I_1' + I_3'$$

$$I_3 = -I_2' + I_3' \quad I_4 = I_2'$$

$$I_5 = I_1' - I_2' \quad I = I_3'$$

これらを使って第2法則を表すと、

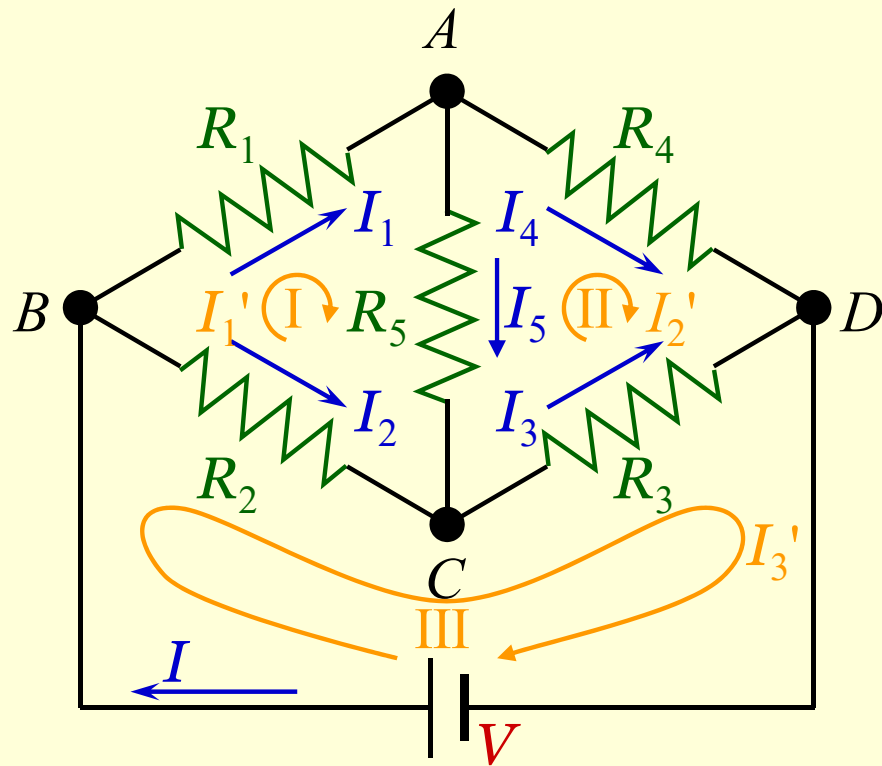
$$\text{I} \quad R_1 I_1' - R_2 (-I_1' + I_3') + R_5 (I_1' - I_2') = 0$$

$$\text{II} \quad -R_3 (-I_2' + I_3') + R_4 I_2' - R_5 (I_1' - I_2') = 0$$

$$\text{III} \quad R_2 (-I_1' + I_3') + R_3 (-I_2' + I_3') = V$$

これらを網目電流についてまとめると、

ホイートストンブリッジ回路



$$\begin{aligned} \text{I} \quad & (R_1 + R_2 + R_5)I_1' - R_5I_2' - R_2I_3' = 0 \\ \text{II} \quad & -R_5I_1' + (R_3 + R_4 + R_5)I_2' - R_3I_3' = 0 \\ \text{III} \quad & -R_2I_1' - R_3I_2' + (R_2 + R_3)I_3' = V \end{aligned}$$

これら3つの連立方程式を解けば、 $I_1 \sim I_5$ 、 I を得ることができる。

また、

$$I_5 = \frac{R_2R_4 - R_1R_3}{\Delta} V$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta = & R_1R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3(R_1 + R_4) \\ & + R_5(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) \end{aligned}$$

より、 $R_1R_3 = R_2R_4$ のとき、 $I_5 = 0$ となる。

ホイートストンブリッジ回路

$$\begin{array}{lll} \text{I} & (R_1 + R_2 + R_5)I_1' & -R_5I_2' - R_2I_3' = 0 \\ \text{II} & -R_5I_1' + (R_3 + R_4 + R_5)I_2' & -R_3I_3' = 0 \\ \text{III} & -R_2I_1' & -R_3I_2' + (R_2 + R_3)I_3' = V \end{array}$$

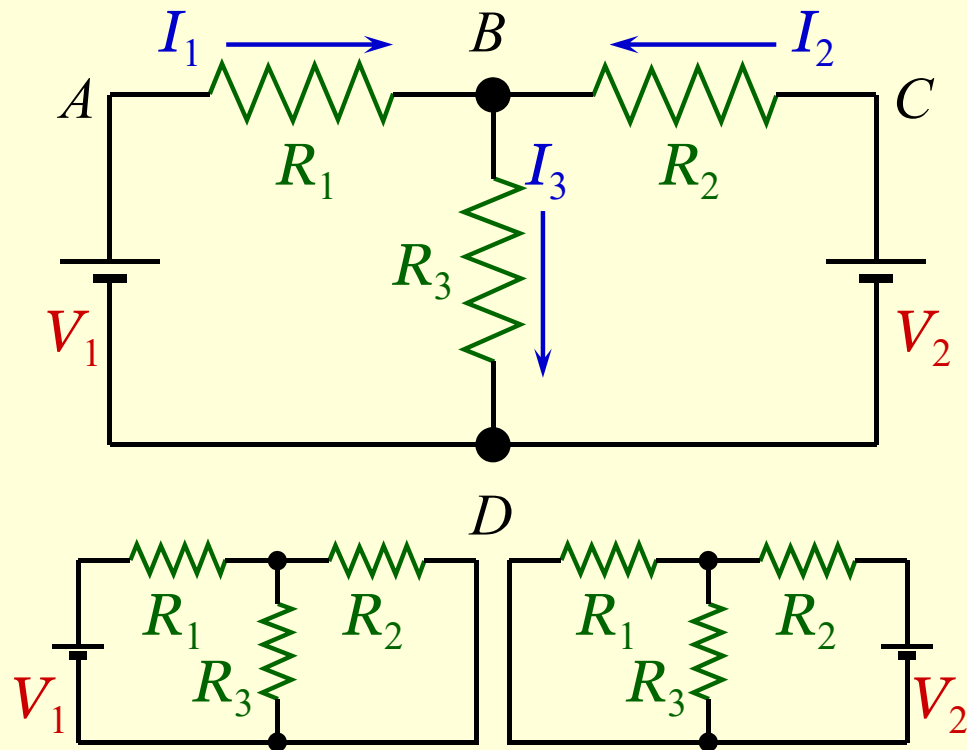
これを行列の形で書き直すと、

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$$

各網目電流は、逆行列を用いることで求めることができる。

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$$

重ね合わせの原理



電源を複数もつ回路において、任意の点の電流や電圧は、それぞれの電源が単独で存在していたときの和に等しい。これを**重ね合わせの原理**という。

図のような回路の場合、電源 V_1 および V_2 のみの回路について解く。

V_1 のみの回路の場合、 R_3 に流れる電流 I_{31} は、

$$I_{31} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

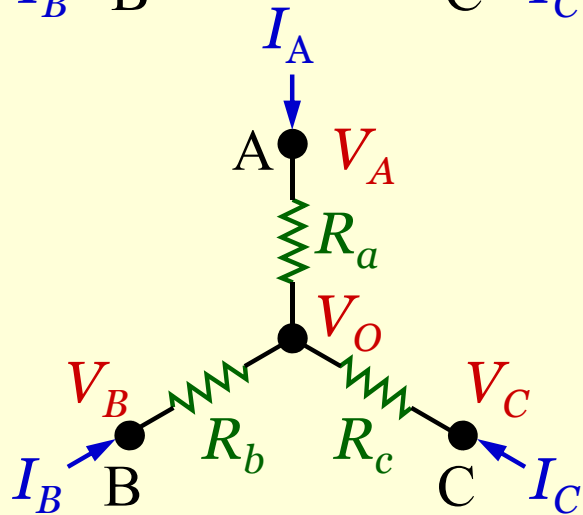
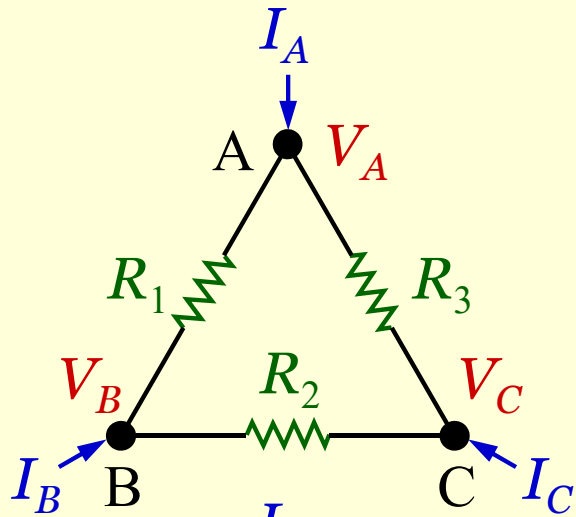
V_2 のみの回路の場合、 R_3 に流れる電流 I_{32} は、

$$I_{32} = \frac{V_2}{R_2 + R_3 R_1 / (R_3 + R_1)} \cdot \frac{R_1}{R_3 + R_1}$$

よって、

$$\begin{aligned} I_3 &= I_{31} + I_{32} \\ &= \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{aligned}$$

ΔY(デルタスター)変換



Δ接続とY接続のそれぞれで、 I_A 、 I_B 、 I_C を V_A 、 V_B 、 V_C で表し、これらが恒等式となるように係数を求める。

$$I_A = \frac{V_A - V_B}{R_1} - \frac{V_C - V_A}{R_3} = \frac{V_A - V_O}{R_a}$$

$$I_B = \frac{V_B - V_C}{R_2} - \frac{V_A - V_B}{R_1} = \frac{V_B - V_O}{R_b}$$

$$I_C = \frac{V_C - V_A}{R_3} - \frac{V_B - V_C}{R_2} = \frac{V_C - V_O}{R_c}$$

$$\frac{V_A - V_O}{R_a} + \frac{V_B - V_O}{R_b} + \frac{V_C - V_O}{R_c} = 0$$

これらを解くと、

$$R_a = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c}$$

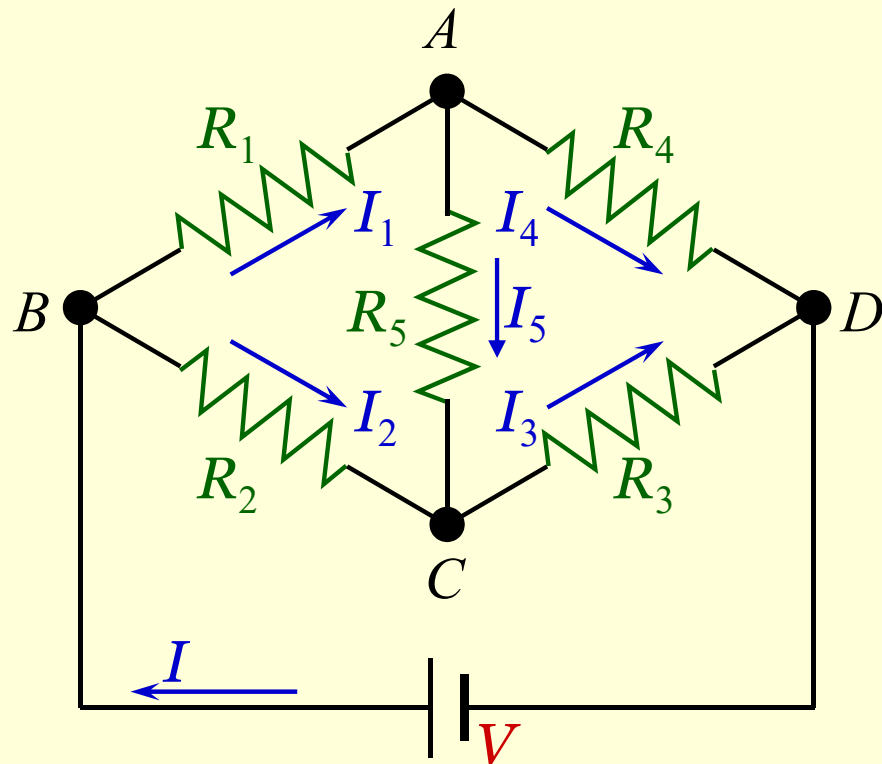
$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b}$$

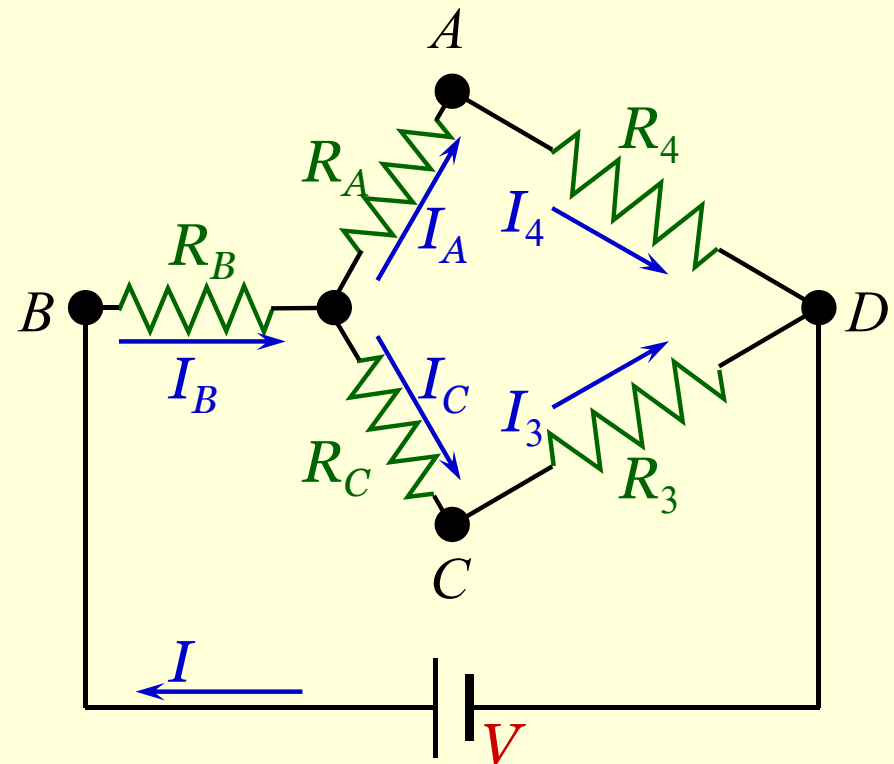
$$R_y = \frac{R' R''}{\sum R_{\Delta}}$$

$$R_{\Delta} = \frac{\sum R' R''}{R_{\text{opposite}}}$$

ホイートストンブリッジの ΔY 変換

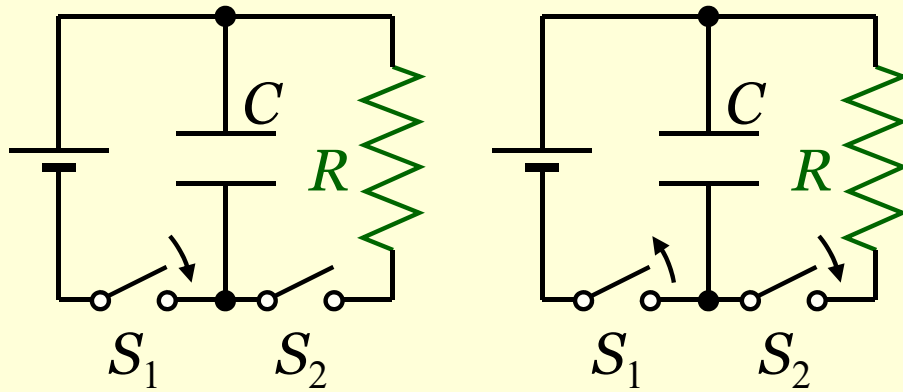


ホイートストンブリッジの R_1 、 R_2 、 R_5 からなる網目を ΔY 変換することで、 R_A 、 R_B 、 R_C からなる等価回路に変換することができる。この結果、回路は単純な直並列回路にすることができるため、各部の電流が容易に計算することができる。



$I = I_B = I_3 + I_4$ 、 $I_A = I_4$ 、 $I_C = I_3$
同様に R_3 、 R_4 、 R_5 に適用することで、 I_1 、 I_2 を求めることができ、これらと第1法則を組み合わせることでも I_5 を求めることができる。

RC回路



図のような回路のスイッチ S_1 を閉じると、コンデンサー C に電荷が蓄えられる。次に、スイッチ S_1 を開けて、スイッチ S_2 を閉じるとコンデンサーに蓄えられた電荷が抵抗 R を流れていき、失われていく。 S_2 を閉じた時刻を $t = 0$ とし、このときコンデンサー C に蓄えられていた電荷を Q_0 とすると、抵抗 R を流れる電流 I は、コンデンサーの電荷が失われて電位差が小さくなるに連れて小さくなる。すなわち、

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

と、

$$RI + \frac{Q}{C} = 0$$

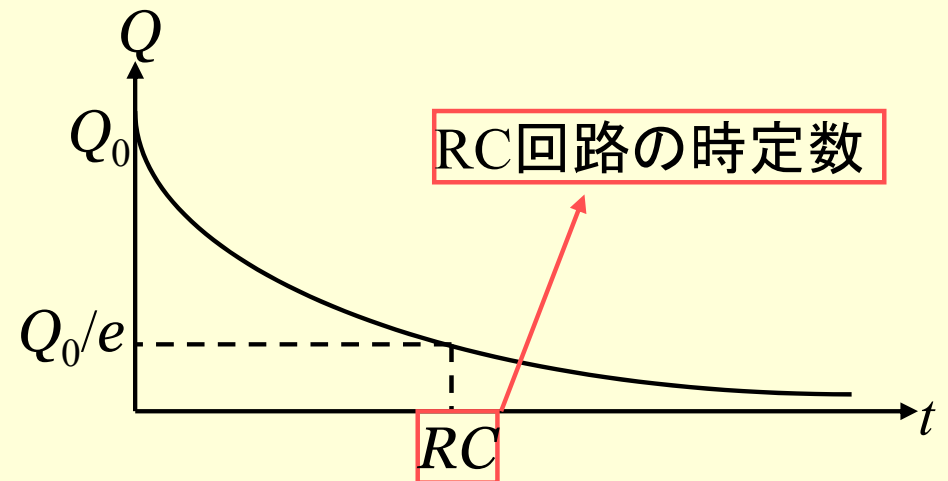
より、

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

となる、これは微分して同じ関数になることを意味するので、

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

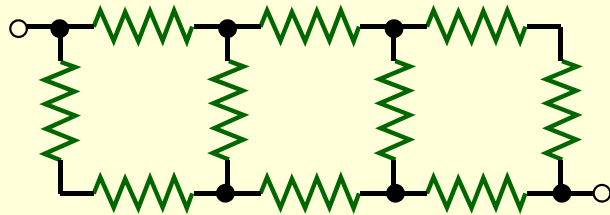
となる。



例題

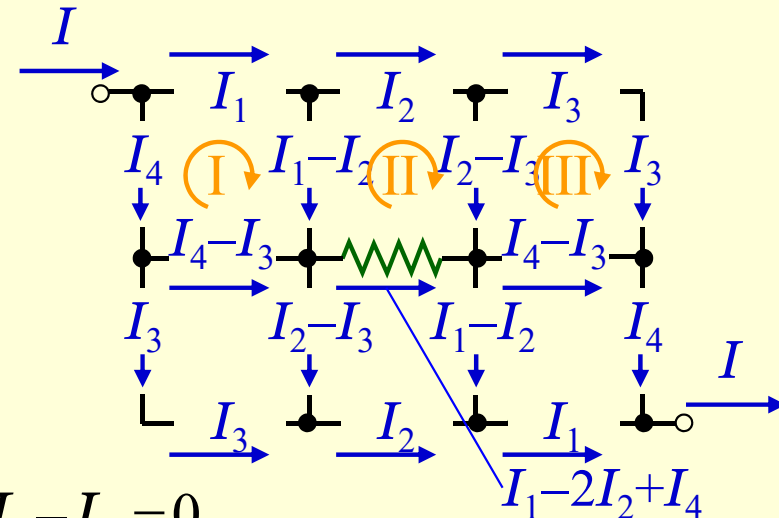
例題1

図の回路の合成抵抗を求めよ。ただし、抵抗は全て同じで R とする。



例題2

図の回路の合成抵抗を求めよ。ただし、抵抗は全て同じで R とする。



$$I - I_1 - I_4 = 0$$

$$R\{I_1 + (I_1 - I_2) - (I_4 - I_3) - I_4\} = 0$$

$$R\{I_2(I_2 - I_3) - (I_1 - 2I_2 + I_4) - (I_1 - I_2)\} = 0$$

$$R\{2I_3 - (I_4 - I_3) - (I_2 - I_3)\} = 0$$

$$I_1 = \frac{37}{69}I, I_2 = \frac{24}{69}I, I_3 = \frac{14}{69}I, I_4 = \frac{32}{69}I$$

$$V = R\left(\frac{37}{69} + \frac{24}{69} + 2 \times \frac{14}{69} + \frac{32}{69}\right)I \therefore \frac{121}{69}R$$