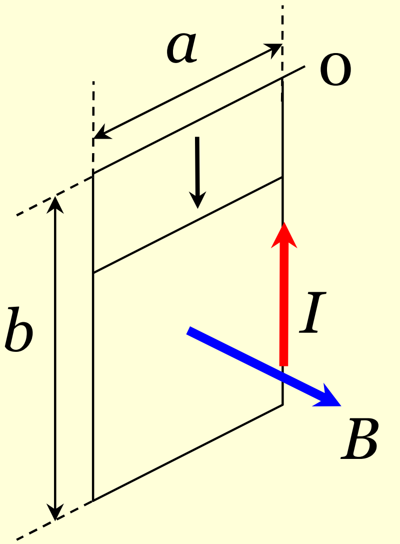
解答

1.磁束密度が一様な水平磁界Bの中に、これに垂直に立てた長方形のコイルがある。上の辺が水平に保たれたまま、他の２つの辺に沿って摩擦なく滑り落ちはじめた。落ちだしてから時間tの後にコイルに流れる電流Iを求めよ。ただし、自己誘導は無視する。なお、動く辺の長さをa、鉛直辺の長さをb、単位長さあたりの抵抗をrとする。



時間tの間に上の辺が落下する距離は、$gt^2/2$。すなわち、時刻tにおけるコイルの面積は、$a(b - gt^2/2)$となり、回路を貫く磁束は、

$$\Phi = BS = Ba(b - \frac{gt^2}{2})$$

よって、誘導起電力Vは、

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Bagt$$

となる。また、回路の長さは、

$$2(a + b - gt^2/2)$$

となるので、回路に流れる電流Iは、

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bagt}{2r(a + b - gt^2/2)}$$

となる。

解答

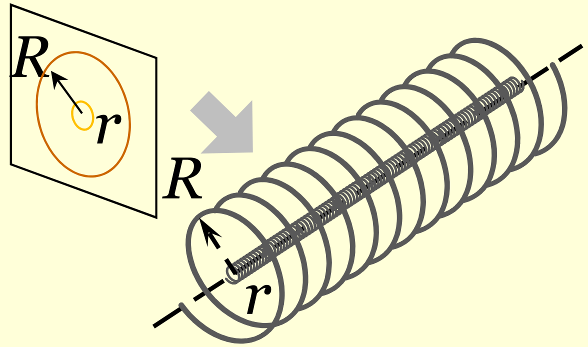
2.1つの平面の中に、大きい円形のコイル（半径R、巻き数N_1）と極めて小さい円形のコイル（半径r、巻き数N_2）とが同心に置かれている。その間の相互インダクタンスMを求めよ。

ビオサバールの法則より、n巻きコイル円電流が中心に作る磁束密度Bは、半径をr、電流Iとすると、

$$B = n\frac{\mu_0 I}{2r}$$

となる（第24章例題のzに0を代入）。

大コイルの電流Iがつくる磁束のうち、小コイルを貫く磁束 F は、小コイルの半径rが大コイルの半径Rと比べて極めて小さい場合は、大コイルの中心付近の磁界と考えること



ができる。よって、

$$\Phi = BS = N_1\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\pi r^2$$

小コイルに生ずる誘導起電力 V は、

$$V = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N_2\cdot N_1\frac{\pi\mu_0 r^2}{2R}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

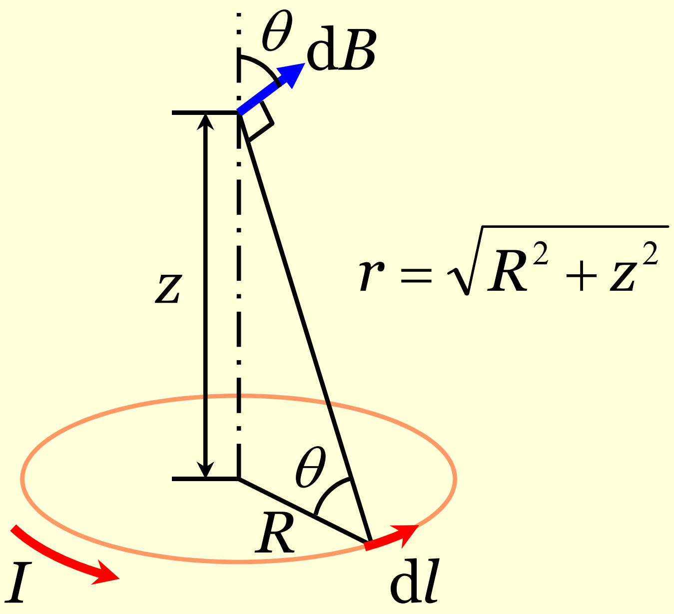
$$= -N_1 N_2\frac{\pi\mu_0 r^2}{2R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

よって、

$$M = N_1 N_2\frac{\pi\mu_0 r^2}{2R}$$

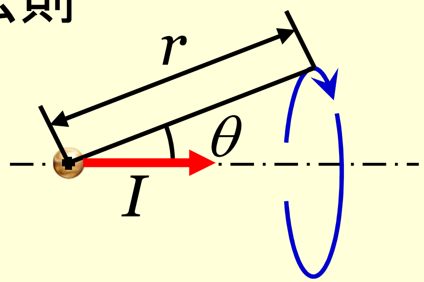
例題

　図のように半径Rの円形の導線に電流Iが流れている。この円の中心軸上で、中心からzだけ離れた点における磁束密度を求めなさい。



※ビオサバールの法則

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta$$



　軸に垂直な成分は、円周上の反対の部分と打ち消しあうので、軸方向の成分のみを考えれば良い。よって、ビオサバールの法則より、

$$B=\int \mathrm{d}B\cos\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}l$$

となる。ここで、

$$r=\sqrt{R^2+z^2}$$

$$\cos\theta=\frac{R}{r}$$

なので、

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int \mathrm{d}l$$

よって、

$$B=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$